Tronc CS

PROF : ATMANI NAJIB

PRODUIT SCALAIRE

Leçon : PRODUIT SCALAIRE
Présentation globale

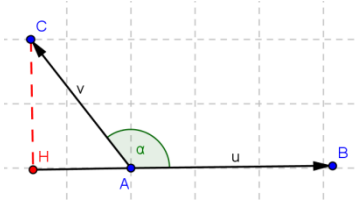
I) Le produit scalaire de deux vecteurs
II. Produit scalaire et norme
III. Produit scalaire et orthogonalité
IV) APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

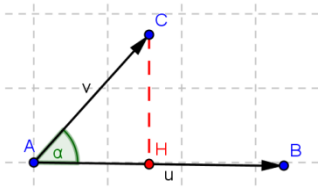
La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I) Le produit scalaire de deux vecteurs

1° Définitions

Définition1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Et soient A ; B et C trois points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$ c a d
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire





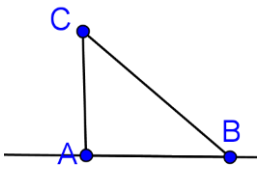
Remarque :
soient A ; B ; C et D quatre points du plan
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overline{A'B'}\times\overline{CD}=\overline{AB}\times\overline{C'D'}$ avec
A' ; B' les projections orthogonales respectifs de A ; B sur la droite (CD)
Et C' ; D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

Application : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et direct et $AB=2cm$
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$

Réponse

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AA}$ car :

A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté orthogonales de B sur (AB) et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)



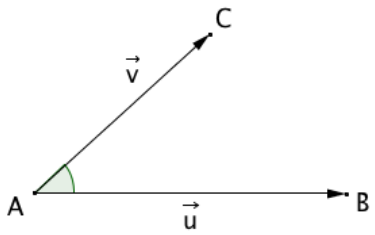
donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AA=AB\times 0=0$

de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BA=2\times 2=4$

de même On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}=-BA\times AB=-2\times 2=-4$

Définition2:Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

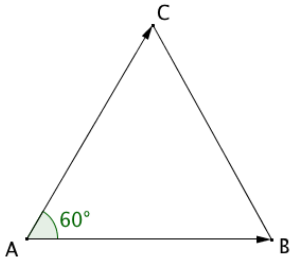
Définition3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :
- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque :
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC$

Exemple :
Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC$

$=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) propriétés

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :
On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$

$=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(-(\vec{v};\vec{u}))$

$=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{v};\vec{u})=\vec{v}.\vec{u}$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

- Admis -

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

2) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$

$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

II. Produit scalaire et norme

Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :

$\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{u}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{u}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2\times\cos 0=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Et $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$

On a ainsi : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Démonstration de la première formule :

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$

$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

$=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

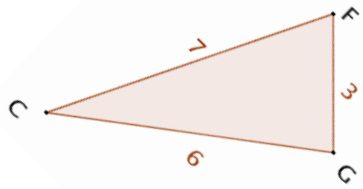
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Exemple :

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)=38$



III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Application : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB=7$ et $AC=5$ et $BC=6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) sachant que $\left\|\vec{u}\right\|=4$ et $\left\|\vec{v}\right\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}$

a)Calculer : $A=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right).\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)$ et $B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)$ et $C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$ et $D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2$

b)en déduire $E=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$ et $F=\left\|2\vec{u}+3\vec{v}\right\|$

Réponse : 1)

a) Calcule de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(BC^2-AB^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2-7^2-5^2\right)=-19$

donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=-19$

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=19$

b) Calcule de AH

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ donc : $AH=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB}=\frac{19}{7}$

2) a) $A=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right).\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$

$A=2.\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}^2=2.\left\|\vec{u}\right\|^2+\vec{u}.\vec{v}-6\left\|\vec{v}\right\|^2=2\times4^2+\frac{1}{2}-6\times2^2=32+\frac{1}{2}-24=\frac{15}{2}$

$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$

$B=\frac{1}{2}\times\|\vec{u}\|^2-\frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\times\|\vec{v}\|^2=\frac{1}{2}\times4^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times2^2=8+\frac{3}{2}-2=\frac{51}{8}$

$C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=4^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2=16+1+4=21$

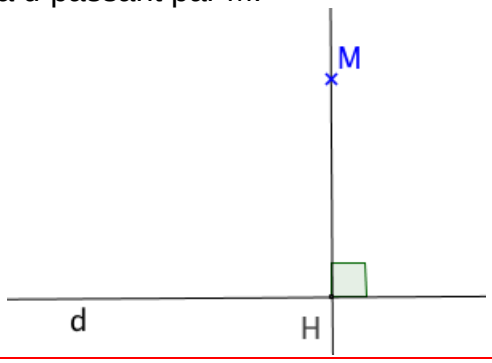
$D=\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=4\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=4\|\vec{u}\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=4\times4^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times2^2=64-6+36=94$

b) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=21$ donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=94$ donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{21}$

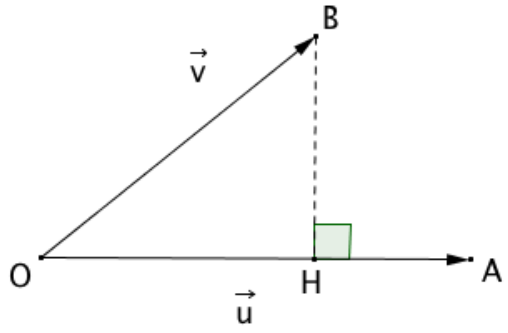
$\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)^2=94$ donc $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2=94$ donc $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|=\sqrt{94}$

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



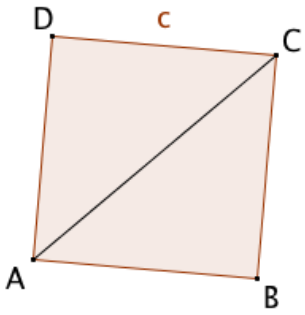
Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=0$.

Exemple :

Soit un carré ABCD de côté c.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = c^2$

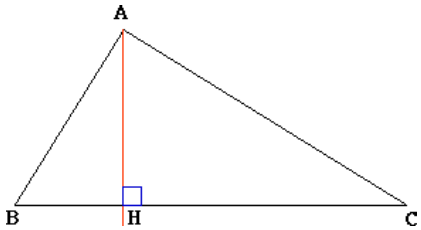
III. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1)LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.

Théorème : Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors BC² = AB² + AC² (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)



Démonstration :

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

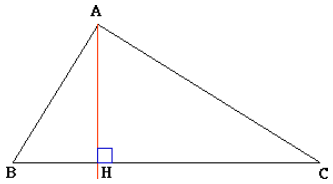
ABC est rectangle en A donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 0$

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

AUTRE RESULTATS :

$BA^2 = BH \times BC$ ET $CA^2 = CH \times BC$ ET $AH^2 = HB \times HC$ ET $AB \times AC = AH \times BC$

Application : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et $AH = 2cm$ et $ABC = \frac{\pi}{3}$



Calculer AB et BH et BC

Réponse

a)On a ABH un triangle rectangle en H donc

$\sin\left(ABC\right) = \frac{AH}{AB}$ Donc $AB = \frac{AH}{\sin\left(ABC\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

b)On a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

Donc: $AB^2 - AH^2 = HB^2$ Donc: $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2$ Donc: $\frac{16}{3} - 2^2 = HB^2$ Donc: $HB^2 = \frac{4}{3}$

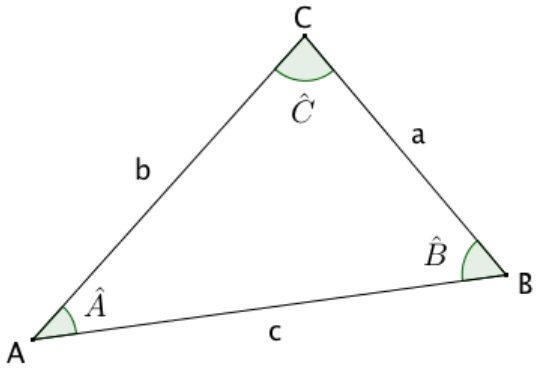
$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c)On a $BA^2 = BH \times BC$ Donc: $BC = \frac{BA^2}{BH}$ Donc: $BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos A$$



Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos A$

et

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$

donc : $\frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = AB \times AC \times \cos A$

soit : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx$ 6,283 185 307 179 586 5

Soit ABC un triangle quelconque.
On a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

Application : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Réponse

a)D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos\frac{2\pi}{3}$ donc $BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129$ donc $BC = \sqrt{129}$

b)D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C$ donc $2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$

donc $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB}$ donc $\cos C = \dfrac{64+129-25}{2\times 8\times\sqrt{129}} = \dfrac{168}{16\sqrt{129}} = \dfrac{21\sqrt{129}}{258}$

EXERCICE : Soit EFG un triangle tel que et $EF = 7$ et $EG = 5$ et $FEG = \dfrac{\pi}{4}$

Calculer FG et $\cos EGF$

3) Théorème de la médiane

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Démonstration :

$$MA^2 + MB^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$$

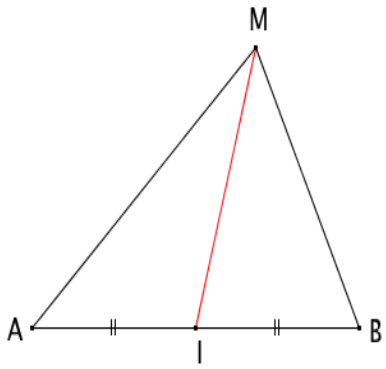
$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$

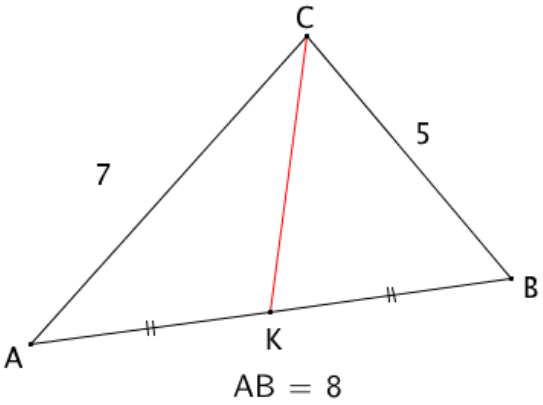
$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$$

$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Exemple :



On souhaite calculer CK.

D'après le théorème de la médiane, on a :

$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \dfrac{AB^2}{2}$, donc :

$$CK^2 = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 + 5^2 - \frac{8^2}{2}\right) = 21$$

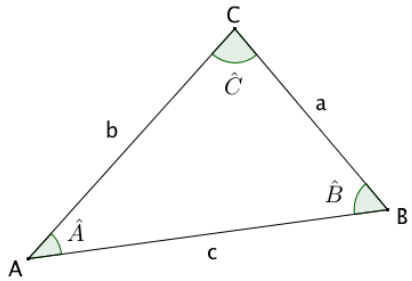
Donc : $CK = \sqrt{21}$.

3) Surface d'un triangle et formule de sinus

Propriétés : Dans un triangle ABC, on a

1) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ avec S _Surface du triangle ABC

2) $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$ formule de sinus



Application1 : : Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF=3$ et $EH=5$ et $FEH=\frac{3\pi}{4}$

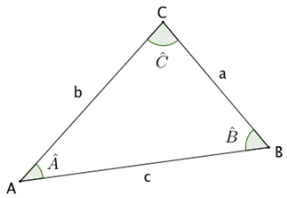
Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$

Réponse

a) $S_{EFH}=\frac{1}{2}EF\times EH\sin E=\frac{1}{2}3\times 5\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{15}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$

b) $S_{EFGH}=2\times S_{EFH}=2\times\frac{15}{4}\sqrt{2}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$

Application2 : : Soit ABC un triangle tel que et $a=BC=6$ et $A=30°$ et $B=73°$



Calculer b et c

Réponse

D'après la formule de sinus on a : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$ donc $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$ donc $b=12\sin 73°=11.47$

$\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$ donc $c=12\sin 77°=11.69$