

# Suites: Limites & récurrence - Correction des exercices

**Exercice 1** Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite  $(u_n)$  :

$$a) u_n = \frac{2n+1}{n+325} = \frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{n \left(1 + \frac{365}{n}\right)} = 2 \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{365}{n}} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{365}{n}\right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \end{array}$$

$$b) u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = 2n \frac{1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{array}$$

$$c) u_n = \frac{4n^2 + 1}{n(2n + 1)} = \frac{4n^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)}{n \times 2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = 2 \frac{1 + \frac{1}{4n^2}}{1 + \frac{1}{2n}} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \end{array}$$

$$d) u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 17} \text{ avec, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ et donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n} + 17) = +\infty, \text{ d'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$e) u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3 + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3n \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{n} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}}}{\frac{3}{\sqrt{n}} + 1}$$

avec,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}} = 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$ .

Ainsi, par produit et quotient des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$ .

$$f) u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2}}{\sqrt{n^2 - n - 1}} = \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$$

avec,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1$  et,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = 1$ , d'où, par quotient des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

g)  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ . Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on est face à une forme indéterminée du type " $+\infty - \infty$ ". On peut alors penser (et doit penser!) à utiliser la quantité conjuguée pour changer cette soustraction :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On a alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , d'où, par addition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty \text{ et enfin, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

h)  $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$  : on peut commencer par essayer de procéder de la même façon en utilisant la quantité conjuguée,

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}-n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n},$$

face à une forme indéterminée " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

On doit alors factoriser par le terme prépondérant :

$$u_n = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}}{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}}{\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}}{\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}}{\frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}}$$

$$\text{soit, } u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

On a alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ , et donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = 2$ , d'où, par quotient des

limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

**Rappel :** Schéma général d'une démonstration par récurrence :

On cherche à montrer par récurrence, pour tout entier  $n$ , la propriété  $\mathcal{P}_n$ .

Initialisation : On vérifie que  $\mathcal{P}_0$  est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$ , la propriété  $\mathcal{P}_n$  soit vraie.

On montre alors, en utilisant cette hypothèse (dite hypothèse de récurrence), que la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est encore vraie.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier  $n$ , la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

**Exercice 2** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 5u_n + 4$ .

Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

Initialisation :  $u_0 = 2$  et donc  $u_0 > 0$ , et la propriété est donc vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$ , on ait  $u_n > 0$ .

On a alors,  $5u_n > 0 \implies 5u_n + 4 > 4$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} > 4 > 0$ .

La propriété est donc encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

**Exercice 3** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = -3$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 5 - 4u_n$ .

Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

Initialisation :  $u_0 = -3$ .

Or, pour  $n = 0$ ,  $(-4)^{0+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3$ , et on a donc pour  $u_0 = (-4)^{0+1} + 1$ .

La propriété est donc vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

ALors,  $u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4((-4)^{n+1} + 1)$ , d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi,  $u_{n+1} = 5 - 4(-4)^{n+1} - 4 = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = 1 + (-4)^{n+1}$ , ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  
 $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ .

**Exercice 4** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ .

Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 1$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 1$ .

Initialisation :  $u_0 = \frac{1}{2}$ , et donc  $0 < u_0 < 1$ , et la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $0 < u_n < 1$ .

Alors, d'une part  $1 < u_n + 1 < 2$ , et d'autre part  $2 < u_n + 2 < 3 \implies \frac{1}{3} < \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{2}$ .

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors  $\frac{1}{3} < \frac{u_n + 1}{u_n + 2} < \frac{2}{2}$ , et on a donc  $0 < u_{n+1} < 1$  :  
la propriété est donc encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  
 $0 < u_n < 1$ .

**Exercice 5** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$ .

Initialisation : Pour  $n = 1$ ,  $\sum_{k=1}^1 k \times k! = 1 \times 1! = 1$ , et  $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$ .

Ainsi, la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$ .

Alors,  $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \left( \sum_{k=1}^n k \times k! \right) + (n + 1) \times (n + 1)! = \left( (n + 1)! - 1 \right) + (n + 1) \times (n + 1)!$  d'après  
l'hypothèse de récurrence.

Ainsi,  $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n + 1)! + (n + 1) \times (n + 1)! - 1 = (n + 1)! \left( 1 + (n + 1) \right) - 1 = (n + 1)! \left( n + 2 \right) - 1$ .

Or,  $(n + 1)! \left( n + 2 \right) = (n + 2)!$ , et on a donc  $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n + 2)! - 1 = \left( (n + 1) + 1 \right)! - 1$ , ce qui  
montre que la propriété est encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1.$$

**Exercice 6** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ .

Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  :  $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 4$ ;  $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 8$ ;  $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 16$ .

Démontrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 2^n$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

Initialisation :  $u_0 = 2$  et donc  $u_0 = 2^0$ . De même  $u_1 = 2 = 2^1$ .

La propriété est donc vraie au rang  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$ , on ait  $u_n = 2^n$  et  $u_{n+1} = 2^{n+1}$ .

On a alors,  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n$ , d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi,  $u_{n+2} = 2^n(5 \times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^n \times 2^2 = 2^{n+2}$ , ce qui montre que la propriété est donc encore vraie au rang  $(n + 2)$ .

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 2^n$ .

Remarque : Dans cette démonstration par récurrence, on a fait une hypothèse de récurrence qui porte sur 2 rangs successifs :  $n$  et  $(n + 1)$ , et qui montre que la propriété se transmet au rang suivant  $(n + 2)$ .

Ainsi, la propriété est vraie au rang  $n = 0$  et  $n + 1 = 1$  (d'après l'initialisation), et elle donc vraie au rang  $n + 2 = 2$ .

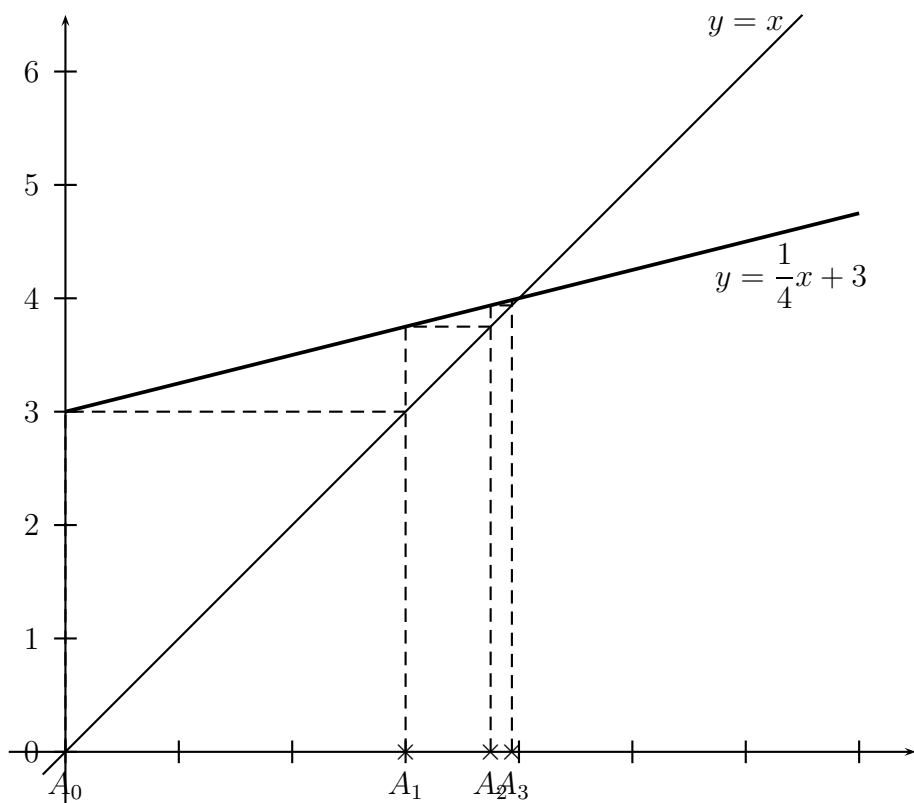
Ensuite, comme elle est vraie au rang  $n = 1$  et  $n + 1 = 2$ , elle est donc aussi vraie au rang  $n + 2 = 3$ .

Puis elle est vraie au rang  $n = 2$  et  $n + 1 = 3$ , donc aussi au rang  $n + 2 = 4$ .

...

**Exercice 7** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ .

- Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$ , puis placer les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  d'ordonnée nulle et d'abscisse respective  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .



- Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq 4$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq 4$ .

Initialisation :  $u_0 = 1$ , et donc  $u_0 \leq 4$ , et la propriété est donc vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $u_n \leq 4$ .

Alors,  $\frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4} \times 4 = 1$ , et donc,  $\frac{1}{4}u_n + 3 \leq 1 + 3 = 4$ .

Ainsi,  $u_{n+1} \leq 4$ , et la propriété est encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient de démontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq 4$ .

3. Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Initialisation :  $u_0 = 1$ , et  $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{13}{4}$ , et donc  $u_0 \leq u_1$ , et la propriété est donc vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Alors,  $\frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1}$ , d'où,  $\frac{1}{4}u_n + 3 \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + 3$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

Ainsi la propriété est encore vraie au rang  $(n + 1)$ .

Conclusion : On vient de démontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ , et donc que la suite  $(u_n)$  est croissante.

4. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4, elle converge donc vers une limite  $l$ .

**Exercice 8** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ .

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .  
Démontrer cette conjecture.

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2; \quad u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{3} \simeq 1,73;$$

$$u_3 = \sqrt{u_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{3} + 1} \simeq 1,65; \quad u_4 = \sqrt{u_3 + 1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3} + 1} + 1} \simeq 1,61;$$

Comme  $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ , on peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > u_{n+1}$ .

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs  $n = 0$  à  $n = 3$  d'après les calculs précédents.

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $u_n > u_{n+1}$ .

Alors,  $u_n + 1 > u_{n+1} + 1$ , et donc,  $\sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1}$ , car la fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1}$ , et la propriété est encore vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : On vient de montrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > u_{n+1}$ , c'est-à-dire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 3$ .

Par une récurrence immédiate, comme  $u_0 = 1 > 0$ , et comme si  $u_n > 0$ , alors  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > 0$ , on sait donc que pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ .

De plus, comme  $u_0 = 1 < 3$  et que la suite  $(u_n)$  est décroissante, on a donc, pour tout entier  $n$ ,  $u_n < u_0 < 3$ .

On a donc bien au final, pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 3$ .

3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite  $l$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite  $l \geq 0$ .

4. Déterminer  $l$ .

La limite  $l$  de la suite vérifie nécessairement  $l = \sqrt{l+1}$  (point fixe),

$$\text{soit } l \geq 0 \text{ et } l^2 = l + 1 \iff l^2 - l - 1 = 0 \iff \left( l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Comme  $l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , la limite de la suite  $(u_n)$  (car on sait qu'elle en a une) est  $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Exercice 9** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3};$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{13}{9};$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{4}{27};$$

2. Montrer que, pour tout  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ .

Montrons par récurrence que, pour tout  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ .

Initialisation :  $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{4}{81} + 1 = \frac{77}{81} > 0$ , et la propriété est vraie au rang  $n = 4$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n \geq 4$  on ait  $u_n \geq 0$ .

Alors,  $\frac{1}{3}u_n \geq 0$ , et donc,  $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0 + n - 2 \geq 0 + 4 - 2$ , car  $n \geq 4$ .

Ainsi,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 2 \geq 0$ , et la propriété est encore vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : On vient donc de démontrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. En déduire que, pour tout  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .

Pour tout entier  $n \geq 5$ ,  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n - 1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$ .

Or, comme  $n \geq 5$ , on a donc  $n - 1 \geq 4$ , et alors, d'après la question précédente,  $u_{n-1} \geq 0$ .

Ainsi,  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq 0 + n - 3$ .

On a donc, pour tout entier  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .

4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$ , on en déduit, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Exercice 10** Soit, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$ .

Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

Pour tout entier  $n$ , on a  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ .

Ainsi, en multipliant ces inégalités par  $\frac{1}{n+1} > 0$ , on obtient  $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , on en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**Exercice 11** Soit, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$ .

Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

On a  $(-1)^n = 1$  lorsque  $n$  est pair, et  $(-1)^n = -1$  lorsque  $n$  est impair.

Ainsi, pour tout entier  $n$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , soit aussi  $n-1 \leq n + (-1)^n \leq n+1$ , puis, multipliant par  $\frac{1}{n+1} > 0$ , on obtient  $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$ .

$$\text{On a } \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ , et donc, par produit et quotient des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$ .

$$\text{De même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice 12** Soit, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$ .

Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq \frac{n-1}{3}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

Pour tout entier  $n$ ,  $(-1)^n + n \geq -1 + n$ ,  
et  $(-1)^n + 2 \leq 1 + 2 = 3$ , d'où  $\frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$ .

Ainsi, en multipliant ces deux inégalités, on obtient :  $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \geq \frac{n-1}{3}$ ,

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$ , on en déduit, d'après le corollaire du théorème des gendarmes, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Exercice 13** Soit la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$ .

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Quel semble être la limite de  $(u_n)$  ?

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3} \simeq 1,732;$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \simeq 1,94;$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4} \simeq 1,984;$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{16} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{\sqrt{255}}{8} \simeq 1,996$$

$$u_5 \simeq 1,999$$

La suite  $(u_n)$  semble converger vers 2.

2. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n^2 - 4$  est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 4) = \frac{1}{4}v_n$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

3. En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$ .

Comme  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

De plus  $v_n = u_n^2 - 4 \iff u_n = \sqrt{v_n + 4}$  ou  $u_n = -\sqrt{v_n + 4}$ .

Comme  $u_n \geq 0$  (car  $u_n$  est définie par une racine carrée), on a donc  $u_n = \sqrt{v_n + 4}$ , et donc,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{0 + 4} = 2$ .

On a ainsi démontré la conjecture sur la limite de  $(u_n)$  faite à la question 1.

**Exercice 14** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$

Quelle valeur de  $u_0$  faut-il prendre pour que la suite  $(u_n)$  soit stationnaire ?

Une suite stationnaire est une suite constante : pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \dots = u_1 = u_0$ .

Ainsi, la suite est stationnaire si,  $u_1 = u_0 \iff \sqrt{3 + u_0} = u_0 \iff 3 + u_0 = u_0^2$  et  $u_0 \geq 0$ .

On doit donc avoir ainsi  $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$  soit, en résolvant l'équation du second degré,  $u_0 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

ou  $u_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .

Comme  $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0$ , on doit donc nécessairement avoir  $u_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .

**Exercice 15** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout entier  $n$ ,  $3u_{n+1} = u_n + 4$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

$$3u_1 = u_0 + 4 = 9 \iff u_1 = 3; \quad 3u_2 = u_1 + 4 = 7 \iff u_2 = \frac{7}{3}$$

2. Démontrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq 2$ .

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq 2$ .

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$  d'après ce qui précède.

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $u_n \geq 2$ .

Alors,  $u_n + 4 \geq 2 + 4 = 6$ , et donc  $3u_{n+1} \geq 6 \iff u_{n+1} \geq \frac{6}{3} = 2$ .

Ainsi, la propriété est encore vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq 2$ .



3. Montrer que  $(u_n)$  est une suite décroissante.

On peut montrer que  $(u_n)$  est décroissante par récurrence, en montrant que pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

On peut aussi le montrer directement :

Pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$ , et donc,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}.$$

Or, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq 2$ , et ainsi,  $-\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{4}{3}$ , d'où,  $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$ .

Ainsi, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$  : la suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

D'après ce qui précède, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 2, elle converge donc vers une limite  $l \geq 2$ .

Cette limite  $l$  satisfait de plus nécessairement l'équation  $3l = l + 4$  (point fixe), soit  $l = 2$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge vers  $l = 2$ .

5. On pose, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = u_n - 2$ .

Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 2 = 3$ .

On en déduit que, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = v_0 q^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$ .

6. Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Déterminer l'expression de  $S_n$ , puis de  $T_n$ , en fonction de  $n$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= 3 + 3 \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3 \left[ \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ &= 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Pour tout entier  $n$ ,  $v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2$ , et donc,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\
&= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2) \\
&= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + \cdots + 2) \\
&= S_n + (n + 1) \times 2 = \frac{9}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) + 2(n + 1)
\end{aligned}$$

7. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .

Comme  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$ , et donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{9}{2}$ .

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n + 1) = +\infty$ , et donc, par addition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ .

**Exercice 16** Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ .

1. a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ .

$$\text{Pour tout entier } n > 0, 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n.$$

b. Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < u_n < 1$ .

Pour tout entier  $n > 0$ ,  $n + 2 \geq 2 > 0$ , et donc,  $n(n + 2) > 0$ .

De plus  $(n + 1)^2 \geq 1^2 > 0$ , et on a donc  $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$ .

De même (en cherchant à utiliser le résultat de la question précédente),  $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ , soit

$$-\frac{1}{(n+1)^2} < 0, \text{ et donc, } u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

Au final, on a bien, pour tout entier  $n > 0$ ,  $0 < u_n < 1$ .

c. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout entier } n > 0, u_{n+1} - u_n &= \left( 1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{-(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2} \\
&= \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier  $n > 0$ ,  $2n + 3 > 3 > 0$ , et  $(n + 2)^2(n + 1)^2 > 0$ ,

d'où,  $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

Remarque : Il y a bien sûr quantité d'autres raisonnements que l'on peut mener pour arriver à cette conclusion :

• Ecrire  $u_n = f(n)$  avec  $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$  et étudier le sens de variation de  $f$ .

- Procéder par encadrements successifs en partant de  $n + 1 < n + 2$  pour arriver à  $u_n > u_{n+1}$
- Conjecturer le sens de variation de  $(u_n)$  en calculant les premiers termes, puis démontrer cette conjecture avec un raisonnement par récurrence
- ...

2. On pose  $x_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

Montrons par récurrence que, pour tout entier  $n > 0$ ,  $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ .

Initialisation :  $x_1 = u_1 = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$  et  $\frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$

La propriété est donc vraie au rang  $n = 1$ .

Hérédité : Supposons que pour un entier  $n$  on ait  $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ .

Alors,  $x_{n+1} = \underbrace{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n}_{x_n} \times u_{n+1} = x_n \times u_{n+1}$

et donc, avec  $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ ,

$x_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)^2}$  et la propriété est encore vraie au rang  $n+1$ .

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier  $n > 0$ ,  $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ .

b. Déterminer la limite de la suite  $(x_n)$ .

$$x_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{2n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

avec,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ , d'où, par produit et quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$