LA DERIVATION -APPLICATIONS

Exercice 1: Soit la fonction f définie par : :

$f\left(x\right)=\frac{4x-3}{2x-6}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-6}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-6)-(4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-6)-2\times(4x-3)}{(2x-6)^2}=\frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2}=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}\quad f'(x)=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$

Donc f est strictement décroissante sur les intervalles. $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

Exercice 2: Soit la fonction f définie par :

$f\left(x\right)=x\sqrt{x^2-x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f\left(x\right)=x\sqrt{u\left(x\right)}$ avec $u\left(x\right)=x^2-x$

Et on a : $u\left(x\right)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$\forall x\in D_f-\{0;1\}$:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=x'\sqrt{x^2-x}+x\frac{\left(x^2-x\right)'}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^2-x}+x\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2-x}\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2-3x$

Le tableau de signe de : $4x^2-3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x)\succ 0\quad \forall x\in]1;+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Exercice 3: Soit $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=x^2+x-2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de x^2+x-2

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9$ deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=-2$

Donc voici le tableau de variation de f :

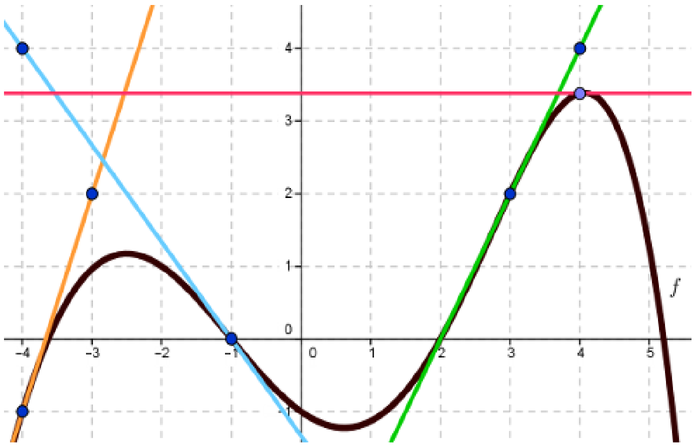
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice 4: On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par sa courbe C en noire ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

1)Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$;

$f(-1)$; $f'(-1)$; $f(3)$; $f'(4)$

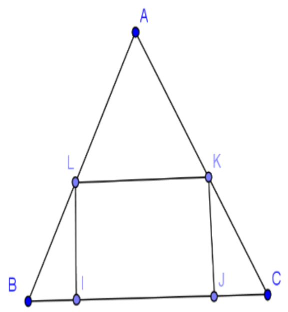
2) Déterminer le signe de $f'(3)$ et $f'(5)$

solution :1) $f(-4)=-1$; $f'(-4)=3$

$f(-1)=0$; $f'(-1)=-\frac{4}{3}$; $f(3)=2$; $f'(4)=0$

2) $f'(3)\succ 0$ et $f'(5)\prec 0$

Exercice5 : soit ABC un Triangle équilatéral et la longueur de son côté est a
On construit à l'intérieur un rectangle $IJKL$
(Voir la figure)
on pose $CI=BJ=x$
1) Déterminer l'intervalle qui contient x
2)Déterminer la valeur de x pour que la surface du rectangle $IJKL$ soit maximal



Solution :1)On a : $0\prec CI+BJ\prec CB$ donc $0\prec 2x\prec a$

donc $0\prec x\prec \frac{a}{2}$ donc $x\in \left]0;\frac{a}{2}\right[$

2)cherchons la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$?

$S(x)=IJ\times IL$ on a : $IJ=a-2x$

Calculons : IL ?? soit H la projection orthogonal de A sur (BC)

On a H est le milieu de $[BC]$(car ABC un Triangle équilatéral) et sur le Triangle AHC on a $I\in(HC)$

Et $L\in(CA)$ et $(IL)\parallel(HA)$ d'après thalles on a :

$\frac{CI}{CH}=\frac{IL}{AH}$ et on a : $CH=\frac{a}{2}$ et $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ et

$CI=x$ donc : $IL=\sqrt{3}x$

$\forall x\in \left]0;\frac{a}{2}\right[$ $S(x)=\sqrt{3}x(a-2x)=-2\sqrt{3}x^2+a\sqrt{3}x$

la fonction S est dérivable sur $\left]0;\frac{a}{2}\right[$ et on a :

$S'(x)=-4\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$ $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}$

Donc voici le tableau de variation de S :

x	0	$\frac{a}{4}$	$a/2$
$S'(x)$	$-$	0	$+$
$S(x)$	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	↘ 0

la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$ est maximal si

et seulement si $x=\frac{a}{4}$ et la surface maximal est :

$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

Exercice 6: montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Solution : raisonnement par récurrence

Pour n=1 $\cos^{(1)}x=\cos' x=-\sin x=\cos\left(x+1\frac{\pi}{2}\right)$

Supposons que : $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que : $\cos^{(n+1)} x = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$\cos^{(n+1)} x = \left(\cos^{(n)} x\right)' = \left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 7: soit l'équation différentielle
(E) : $y'' + 4y = 0$
1)Résoudre l'équation différentielle (E)
2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0)=1$ et $g'(0)=2$

solution : $(w=2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} F(0)=1 \\ F'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Donc : $F(x) = \cos 2x + \sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$F(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice8 : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x-1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x-1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2/3$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$\forall x \in D_h$: $h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$

$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$ $\frac{3}{(x-1)^2} \succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	-1

h′ s’annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative c’est $-1/4$ en -1

Exercice 9: Soit la fonction : $f(x)=4x^3-3x^2-6x$

Montrer que f est majorée sur l’intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ et minorée sur l’intervalle : $I_2=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et bornée sur l’intervalle : $I_3=\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x)=6(2x^2-x-1)=6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c’est $\frac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1$: $f(x) \le \frac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l’intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ par $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c’est -5 donc :

$\forall x \in I_2$: $-5 \le f(x)$ donc que f est minorée sur l’intervalle : I_2 par -5

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C’est en s’entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l’on devient

Un mathématicien