

Ensembles Applications : Exercices

Exercice 1

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E . Montrer :

- 1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
- 2) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
- 3) $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \implies B \subset C$.
- 4) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 5) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C = A - (B \cup C)$
- 6) $A \triangle \bar{B} = A \triangle B$

Exercice 2

Dans \mathbb{C} on définit la relation \mathfrak{R} par : $z \mathfrak{R} z' \iff |z| = |z'|$

- 1) Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Déterminer la classe d'équivalence de chaque z de \mathbb{C} .

Exercice 3

On définit sur \mathbb{R} la relation \mathfrak{R} par : $x \mathfrak{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$.

- 1) Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{R} . Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 4

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit sur $P(E) - \emptyset$ la relation \triangleleft par : $X \triangleleft Y \iff (X = Y \text{ ou } \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y)$.

Vérifier que \triangleleft est une relation d'ordre.

Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications ; on considère l'application $h : E \longrightarrow F \times G$ définie par : $\forall x \in E : h(x) = (f(x), g(x))$.

- 1) Montrer que si f et g sont injectives, alors h l'est aussi.
- 2) On suppose que f et g sont surjectives, h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 6

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f = f \circ f \circ f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 7

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que : $p = p \circ p$.

Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = Id_E$.

Exercice 8

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que : $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective.

Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 9

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $P(X)$.

- On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \longrightarrow P(X)$ l'ensemble $A = \{x \in X / x \notin f(x)\}$

Exercice 10

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \longrightarrow X$ et tout $h : Z \longrightarrow X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
- 2) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ et tout $h : Y \longrightarrow Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.



Correction

Exercice 1

1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) - C$.

2) Comme 1)

3) $B = (A \cup B) \cap B \subset (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) \subset (A \cap C) \cup (C \cap B) = (A \cup B) \cap C \subset C$

4) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (B \cup (A \cap C)) \cap (C \cup A) = (B \cap (C \cup A)) \cup (A \cap C) = (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$

5) $(A - C) - (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A - B) - C$

Et : $(A - B) - C = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A - (B \cup C)$

6) $\bar{A} \Delta \bar{B} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = A \Delta B$

Exercice 2

1) Soient z, z', z'' des complexes quelconques.

• Reflexivité : $z \mathfrak{R} z$ car $|z| = |z|$.

• Symétrie : $z \mathfrak{R} z' = z' \mathfrak{R} z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.

• Transitivité : $z \mathfrak{R} z'$ et $z' \mathfrak{R} z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z \mathfrak{R} z''$.

Donc \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

2) La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z , c'est-à-dire l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cercle \mathfrak{C} de centre 0 et de rayon $|z|$: $\mathfrak{C} = \{z|e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3

1) Evident, il suffit de remarquer que $x \mathfrak{R} y \iff x^2 - x = y^2 - y$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments y de \mathbb{R} tels que $x \mathfrak{R} y$. On doit donc résoudre l'équation $x^2 - y^2 = x - y$. Elle se factorise en $(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0$.

La classe de x est donc égale à $x, 1 - x$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x = 1 - x \iff x = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, elle est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

• Reflexivité : pour tout $X \in P(E)$ on a : $X \triangleleft X$ car $X = X$.

• Antisymétrie : pour $X, Y \in P(E)$ tels que $X \triangleleft Y$ et $Y \triangleleft X$, alors par définition de \triangleleft on a : $\forall x \in X \forall y \in Y : x \leq y$ et $y \leq x$.

Comme la relation \leq est une relation d'ordre alors : $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$.

Donc $\forall x \in X \forall y \in Y : x = y$; ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

• Transitivité : soit $X, Y, Z \in P(E)$ tels que $X \triangleleft Y$ et $Y \triangleleft Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$, alors il est clair que $X \triangleleft Z$.

Supposons que X et $Y \neq Z$ alors :

$$\forall x \in X \forall y \in Y \forall z \in Z \quad x \leq y \text{ et } y \leq z.$$

alors par transitivité de la relation \leq on obtient : $\forall x \in X \forall z \in Z : x \leq z$

Donc $X \triangleleft Z$.

Conclusion : \triangleleft est une relation d'ordre.

Exercice 5

1) Soient $x, y \in E$.

$$h(x) = h(y) \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ g(x) = g(y) \end{cases} \implies x = y \text{ dès que } f \text{ ou } g \text{ est injective.}$$

2) Contre exemple : Soit E un ensemble contenant 2 éléments a et b : $E = \{a, b\}$ et considérant $F = G = E$ et $f = g = Id_E$ surjectives (évident).

On aura alors $\forall x \in E : h(x) = (Id_E(x), Id_E(x)) = (x, x)$.

On a : $(a, b) \in E \times E$, mais il n'existe pas d'élément x de E qui vérifie : $h(x) = (a, b)$
 Donc h n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 6

Si f est injective :

comme $\forall x \in E : f(f \circ f)(x) = f(x)$; $f \circ f = Id_E$, donc f est bijective.

Si f est surjective : pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f \circ f(x) = f \circ f \circ f(y) = f(y) = x$.

Donc $f \circ f = Id_E$; donc f est bijective.

Exercice 7

Si p est injective. Comme $\forall x \in E , p(p(x)) = p(x)$. On déduit que $p = Id_E$.

Si p est surjective, pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$, d'où $p = Id_E$

Exercice 8

On a $g \circ (f \circ g \circ f)$ est surjective et $(f \circ g \circ f) \circ g$ est injective, donc g est bijective.

d'autre part : $f \circ g \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g \circ f) = (f \circ g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ est donc surjective et injective, donc bijective.

En conclusion, $f \circ g \circ f$ est bijective et g bijective, donc f est bijective.

Exercice 9

Utilisons l'indication, Si f était surjective, nous pourrions trouver $a \in X$ tel que $A = f(a)$.

Supposons d'abord $a \in A$; on obtient $a \in f(a)$ et par conséquent $a \notin A$, ce qui contredit notre hypothèse.

Supposons maintenant que $a \notin A$; on obtient $a \notin f(a)$ et par conséquent $a \in A$, ce qui contredit notre hypothèse.

Par conséquent, l'élément a n'appartient ni à A , ni à son complémentaire, ce qui est impossible.

Par suite, A ne possède pas d'antécédent par f , qui est donc non surjective.

- Remarque : Ce sujet entre dans le cadre du "paradoxe de Russell" (Paradoxe du menteur).

Exercice 10

1)

- Supposons d'abord f injective et soient $g : Z \rightarrow X$ et $h : Z \rightarrow X$ telles que $f \circ g = g \circ h$.

Alors, pour tout z de Z , on a $f(g(z)) = f(h(z)) \implies g(z) = h(z)$ puisque f est injective.

On a donc bien $g = h$.

- Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective.

Soit $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z = \{0\}$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$.

Alors on a $f \circ g(0) = f \circ h(0) (= f(x) = f(y))$; alors que $g \neq h$.

2)

- Supposons d'abord f surjective et soient $g : Y \rightarrow Z$ et $h : Y \rightarrow Z$ telles que $g \circ f = h \circ f$.

Soit $y \in Y$. Il existe x de X tel que $y = f(x)$. On en déduit $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$, ce qui prouve $g = h$.

- Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective.

Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$.

On considère alors $Z = \{0, 1\}$, g défini sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h défini sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y .

Alors on a bien $g \circ f = h \circ f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.