Limite d'une fonction : Exercices

Limite d'une somme, d'une différence - forme indéterminée - asymptote

Dans chaque cas, on donne la limite de $f(x)$ et $g(x)$.

Déterminer si possible, la limite de $f(x)+g(x)$ et de $f(x)-g(x)$ et indiquer les éventuelles asymptotes.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-3} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-3} g(x)=-\infty \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-4 \end{cases}$

Limite d'un produit, d'un quotient - forme indéterminée - asymptote

Dans chaque cas, on donne la limite de $f(x)$ et $g(x)$.

Déterminer si possible, la limite de $f(x)\times g(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et indiquer les éventuelles asymptotes.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to0} g(x)=+\infty \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$

Dans chaque cas, on donne la limite de $f(x)$ et $g(x)$ et le signe de $g(x)$.

Déterminer si possible, la limite de $f(x)\times g(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et indiquer les éventuelles asymptotes.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Limite d'une fonction - forme indéterminée - asymptote

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3-5x^2+1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-5x^2+1$

Déterminer les limites suivantes et indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x-1}{2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)\times\dfrac{1}{x+1}$

Limite à gauche et à droite - asymptote

Déterminer les limites suivantes. Indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

Déterminer les limites suivantes. Indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x+5}{1-x}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{2x+5}{1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+5}{1-x}$

Limite d'une composée

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$

Limite du type $\dfrac{0}{0}$ - Utiliser la dérivation

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-5x-4}{x+1}$

Exemple de fonction n'ayant pas de limite

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$.

1°) Démontrer qu'on ne peut avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ni $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2°) Calculer $f(2\pi n)$ et $f(2\pi n+\pi)$ où n est un entier naturel.

3°) En déduire que f n'a pas de limite finie en $+\infty$.

4°) Que peut-on conclure ?

5°) Comment adapter cette méthode, pour montrer que la fonction sinus n'a pas de limite.

On considère une fonction f définie et décroissante sur $\mathbb{R}$. On sait de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

1°) Quelle conjecture peut-on faire sur f ?

2°) Démontrer cette conjecture.

Limite et encadrement - théorème des gendarmes et de comparaison

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x-2\sin(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x+\cos(x)}$

Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ vérifiant une condition donnée.
Déterminer, si possible, la limite de f en $+\infty$ et en 0 :

1) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$.

2) Pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x} + 1$.

3) Pour tout $x > 0$, $|6 - 2f(x)| \leq \dfrac{1}{x}$.

1°) f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$

a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Justifier votre réponse.

2°) f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$

a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Justifier votre réponse.

3°) f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que pour $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$

a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Justifier votre réponse.

4°) f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que pour $x \geq 1$, $1 - \dfrac{1}{x} \leq 2f(x) - 5 \leq 1 + \dfrac{1}{x^2}$

Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

5°) f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ telle que pour $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$

a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Justifier votre réponse.

c) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Justifier votre réponse.

On considère une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{2x^2}$

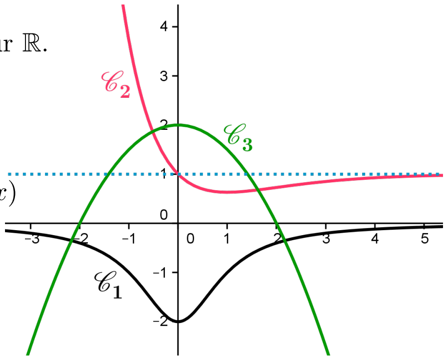
1°) A l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite ℓ de f en $+\infty$.

2°) Démontrer que pour $x \geq 1$, $|f(x) - \ell| \leq \dfrac{1}{2x}$

3°) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4°) Retrouver la limite de f en $+\infty$ sans utiliser d'encadrement.

Limite et opération



$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$,$\mathscr{C}_3$ sont les courbes respectives de 3 fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer graphiquement les limites de f, g et h en $+\infty$ et $-\infty$.
2°) En déduire, si possible, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times h(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+h(x)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)-g(x)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x))$

Limite et tableau de variations de $-f$, $\dfrac{1}{f}$ et $|f|$

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
f	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5

1°) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
Indiquer les équations des éventuelles asymptotes.

2°) Déterminer le tableau de variations des fonctions $-f$, $\dfrac{1}{f}$ et $|f|$.
Préciser dans chaque cas, les limites aux bornes du domaine de définition.

Déterminer une fonction connaissant le tableau de variations et les limites

On connait le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

On sait de plus qu'il existe trois réels a, b, c tels que pour tout $x \neq -3$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$.
Déterminer les valeurs de a, b, c en justifiant.

Étude complète d'une fonction - Déterminer a, b, c ...

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$.

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$.

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3°) Refaire le 2°) sans utiliser le 1°).

4°) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ 5°) Déterminer $f'(x)$.

6°) Dresser le tableau de variation de f

Préciser dans ce tableau les limites aux bornes du domaine de définition.

Indiquer les équations des éventuelles asymptotes.

7°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b)$

Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

Vérifier cette interprétation à l'aide de la calculatrice.

Limite et racine - expression conjuguée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$

1°) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra utiliser l'expression conjuguée.

Déterminer une fonction connaissant les limites

Dans chaque cas, déterminer une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

---

toto