Exercice 1

Déterminer la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $(\exists x \in \mathbb{R})\quad x^2 < x$ 2) $(\forall n \in \mathbb{N})\quad n^2 \geq n$ 3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\quad x > \frac{1}{x}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\quad x + y - 2 = 0$ 5) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\quad x + y - 2 = 0$

6) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\quad xy + 2y + x + 2 = 0$ 7) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt{n(n+1)+1} \in \mathbb{N}$

Exercice 2

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

1) $(\forall x > 1)(\forall y > 1) : \left(x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y \right)$

2) soient z , y , x trois réels . montrer que : $\left(x + y > 2z \right) \Rightarrow \left(x > z \text{ ou } y > z \right)$

3) b , a deux réels tels que $b \neq 2a$ montrer que $b \neq \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$

4) $\left[(\forall x \in \mathbb{R}) : (a < x \Rightarrow b < x) \right] \Rightarrow (b \leq a)$

5) montrer que tout y , x de $\mathbb{R}$ on a : $\left(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Exercice 3

En utilisant l'absurde montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N})\quad \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$ 2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$

3) soients n un entier naturel impair et x_1 , x_2, ... , x_n des éléments distincts de $E = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$

Montrer que $(\exists k \in E)\ \left(n - k \text{ est impair} \right)$

4) soient c , b , a des réels de $\mathbb{R}^{+*}$ et tels que $abc > 1$ et $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

a) montrer que $a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $c \neq 1$

b) montrer que $a < 1$ ou $b < 1$ ou $c < 1$

Exercice 4

Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

1) a) si n est non divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3

b) déduire que le nombre $ab\left(a^2 - b^2\right)$ est divisible par 3 pour tous a et b de $\mathbb{N}$

2) $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ 3) $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

Exercice 5

Montrer par récurrence que : 1) 9 divise $4^n + 6n - 1$ 2) 3 divise $4n^3 - n$

3) $7 / 3^{2n+3} + 2^{n+3}\quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 4) $11 / 9^{n+1} + 2^{6n+1}\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

5) $(\forall n \geq 1)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\quad (1+x)^n > 1 + nx$ 6) $\sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)^3 = n^2\left(2n^2 - 1\right)\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

7) $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 8) $\sum_{k=1}^{k=n} k\,2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

9) $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\quad (\forall a \neq 1)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 10) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p^2}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

11) $\sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) = \frac{n\left(n^2 - 1\right)}{6}\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 12) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 6

Soient a et b deux réels de $\left[0,1\right]$. on pose $A = ab$; $B = a\left(1-b\right)+b\left(1-a\right)$ et $C = \left(1-a\right)\left(1-b\right)$

1) montrer que $B \geq 2\left(\sqrt{ab}-ab\right)$

2) on suppose que $A < \frac{4}{9}$ et $B < \frac{4}{9}$ et $C < \frac{4}{9}$

a) montrer que $ab-\sqrt{ab}+\frac{2}{9} > 0$ puis déduire que $ab < \frac{1}{9}$

b) montrer que $C < \frac{4}{9} \Rightarrow a+b-ab > \frac{5}{9}$

c) montrer que $B \geq \frac{4}{9}$. que peut-on déduire

Exercice 7

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on pose $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

1) montrer que $\left(\forall n \geq 2\right)$ $P_n = \frac{2}{n\left(n+1\right)}\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

2) a) vérifier que $\left(k+1\right)^2-\left(k+1\right)+1 = k^2+k+1$

b) déduire que $\left(\forall n \geq 2\right)$ $P_n = \frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3n\left(n+1\right)}$

Exercice 8

Soit a un élément de $\left]0,1\right[$.

1) montrer que $\left(\forall\left(p,q\right) \in \mathbb{N}^2\right)$ $p \leq q \Rightarrow a^p \geq a^q$

2) a) montrer que $a+a^2+......+a^n = a\frac{1-a^n}{1-a}$

b) déduire que $1-a^n \geq n\left(1-a\right)a^{n-1}$

3) prends $a = 1-\frac{1}{n^2}$ et montrer que $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$

Exercice 9

1) montrer que :

$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\left(2n+1\, est\, un\, carrée\, parfait\right) \Rightarrow \left(n+1\, est somme\, de\, deux\, carrées\, parfaits\right)$

2) a) montrer que $\left(\forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^{*2}\right)$ $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

b) déduire que pour tous réels c , b , a de $\mathbb{R}^{*+}$ on a : $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

3) montrer que la proposition $\left(\forall\left(n,m\right) \in \mathbb{N}^{*2}\right)$ $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.....+\frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$ est fausse

4) on pose $A_n = \underbrace{777.....7}_{n\, fois}$ montrer que $A_n = \frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

5) a) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\left(\frac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\right)$

b) déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$