Géométrie analytique de l'espace

Représentation paramétrique d'une droite
Exercices corrigés

- **Exercice 1 :** représentation paramétrique d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur
- **Exercice 2 :** représentation paramétrique d'une droite connaissant deux points
- **Exercice 3 :** représentation paramétrique d'une droite passant par un point et parallèle à une droite
- **Exercice 4 :** représentation paramétrique d'une droite passant par un point et orthogonale à un plan
- **Exercice 5 :** utilisation de la représentation paramétrique d'une droite
- **Exercice 6 :** représentation paramétrique d'une droite et projection orthogonale
- **Exercice 7 :** intersection de droites (= position relative de deux droites)
- **Exercice 8 :** intersection de droites suivant un paramètre (= position relative de deux droites)
- **Exercice 9 :** intersection de droite et de plan (= position relative d'une droite et d'un plan)
- **Exercice 10 :** intersection de droite et de sphère
- **Exercice 11 :** droites coplanaires et détermination d'une équation cartésienne de plan
- **Exercice 12 :** représentation paramétrique d'un segment et d'une demi-droite
- **Exercice 13 :** intersection de deux plans et représentation paramétrique de la droite d'intersection

Exercice 1 *(1 question)* *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. La droite (d) passe par le point $A(2\,;1\,;3)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Donner une représentation paramétrique de (d).

Correction de l'exercice 1 ↻ *Retour au menu*

La droite (d) passe par le point $A(2\,;1\,;3)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

$M(x\,;y\,;z) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow \underbrace{\exists t \in \mathbb{R}}_{\substack{il\ existe\\ un\ réel\ t}}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x - x_A = t x_{\vec{u}} \\ y - y_A = t y_{\vec{u}} \\ z - z_A = t z_{\vec{u}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x - 2 = t \times 5 \\ y - 1 = t \times 2 \\ z - 3 = t \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Remarque : On pouvait directement appliquer le résultat du cours ci-dessous.

Rappel : Représentation paramétrique d'une droite

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soit (d) la droite passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\y_{\vec{u}}\\z_{\vec{u}}\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Dire qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à (d) équivaut à dire qu'il existe un réel t vérifiant le système d'équations paramétriques de paramètre t suivant : $\begin{cases} x = x_A + x_{\vec{u}} \times t \\ y = y_A + y_{\vec{u}} \times t \\ z = z_A + z_{\vec{u}} \times t \end{cases}$

Exercice 2 *(1 question)* *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1\,;-2\,;3)$ et $B(3\,;2\,;-1)$.

Correction de l'exercice 2 *↻ Retour au menu*

Soient les points $A(1\,;-2\,;3)$ et $B(3\,;2\,;-1)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

La droite (AB) passe par le point $A(1\,;-2\,;3)$ et admet $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} \times t \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + (-4)t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Finalement, **une représentation paramétrique de la droite (AB) est** $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = -2 + 4t} \\ \boldsymbol{z = 3 - 4t} \end{cases}$ $(\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$.

Remarque importante : Une représentation paramétrique de droite est obtenue à partir du choix d'un point et d'un vecteur directeur. C'est pourquoi il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite. En l'occurrence, $\begin{cases} x = x_B + x_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ y = y_B + y_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ z = z_B + z_{\overrightarrow{AB}} \times t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une autre représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 3 ***(1 question)*** ***Niveau : facile***

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $A(0\,;-1\,;2)$ et parallèle à la droite passant par les points $B(-1\,;2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;4)$.

Correction de l'exercice 3 *↻ Retour au menu*

Rappel : Parallélisme et colinéarité

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient (d) et (Δ) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ces droites sont parallèles (c'est-à-dire strictement parallèles ou confondues) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les droites (d) et (BC) étant parallèles, un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Or, $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) passe par le point $A(0\,;-1\,;2)$ et admet $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + (-1)t \\ z = 2 + 1t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, c'est-à-dire $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2t} \\ \boldsymbol{y = -1 - t} \\ \boldsymbol{z = 2 + t} \end{cases}$ $(\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$.

Exercice 4 *(1 question)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $A(-1\,;2\,;-3)$ et orthogonale au plan d'équation $2x-3y+4z+1=0$.

Correction de l'exercice 4 — *↻ Retour au menu*

Rappel : Vecteur normal à un plan

Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal à un plan signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à ce plan.

L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace qui vérifient l'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ (où a, b, c désignent des réels non tous nuls et d un réel) est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Réciproquement, si un plan a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ (où a, b, c désignent des réels non tous nuls et d un réel).

(d) est une droite orthogonale au plan d'équation $2x-3y+4z+1=0$, donc (d) admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan.

Or, un vecteur normal au plan d'équation $2x+(-3)y+4z+1=0$ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$.

(d) passe par le point $A(-1\,;2\,;-3)$ et admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+(-3)t\\z=-3+4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\begin{cases}\boldsymbol{x=-1+2t}\\\boldsymbol{y=2-3t}\\\boldsymbol{z=-3+4t}\end{cases}$ $(\boldsymbol{t}\in\mathbb{R})$.

Exercice 5 *(7 questions)* *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Donner les coordonnées de trois points appartenant à (d).
2) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant 2 pour abscisse.
3) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant -4 pour ordonnée.
4) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant 6 pour cote.
5) Le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$ appartient-il à (d) ?
6) Donner un vecteur directeur de (d).
7) Donner le vecteur directeur de (d) de cote 7.

Correction de l'exercice 5 *↻ Retour au menu*

Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Donnons les coordonnées de trois points appartenant à (d).

Rappel : Représentation paramétrique de droite et critère d'appartenance

Une représentation paramétrique d'une droite (d) n'est pas un système à résoudre mais un critère d'appartenance d'un point à (d). Pour obtenir un point de (d), il suffit d'affecter une valeur au paramètre de la représentation paramétrique de (d).

Pour chaque valeur réelle de t, on obtient un point de (d). Prenons donc arbitrairement 3 valeurs de t distinctes.

✓ Si $t = 0$, alors $\begin{cases} x = 3 + 2 \times 0 \\ y = 1 - 2 \times 0 \\ z = -1 - 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

Le point de coordonnées $(3\,;1\,;\,-1)$ appartient à (d). Il s'agit du point de paramètre $t = 0$.

✓ Si $t = 1$, alors $\begin{cases} x = 3 + 2 \times 1 \\ y = 1 - 2 \times 1 \\ z = -1 - 1 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$.

Le point de coordonnées $(5\,;-1\,;\,-2)$ appartient à (d). Il s'agit du point de paramètre $t = 1$.

✓ <u>Si $t=\sqrt{\pi}$</u>, alors $\begin{cases} x=3+2\times\sqrt{\pi} \\ y=1-2\times\sqrt{\pi} \\ z=-1-\sqrt{\pi} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=3+2\sqrt{\pi} \\ y=1-2\sqrt{\pi} \\ z=-1-\sqrt{\pi} \end{cases}$.

Le point de coordonnées $\left(\mathbf{3+2\sqrt{\pi}\,;1-2\sqrt{\pi}\,;\,-1-\sqrt{\pi}}\right)$ appartient à $(\boldsymbol{d})$. Il s'agit du point de paramètre $t=\sqrt{\pi}$.

2) Donnons les coordonnées du point de (d) ayant 2 pour abscisse.

Pour ce faire, cherchons le point de coordonnées $(2\,;y\,;z)$. Ce point appartenant à (d), ses coordonnées vérifient chacune des équations paramétriques de (d). Résolvons donc le système $\begin{cases} 2=3+2t \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2=3+2t \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=2t \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ y=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z=-1-\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le point de $(\boldsymbol{d})$ ayant 2 pour abscisse a pour coordonnées $\left(\mathbf{2\,;2\,;\,-\frac{1}{2}}\right)$. Ce point est obtenu lorsque le paramètre t est égal à $-\frac{1}{2}$.

3) Donnons les coordonnées du point de (d) ayant -4 pour ordonnée.

Cherchons donc le point de coordonnées $(x\,;-4\,;z)$. Ce point appartenant à (d), ses coordonnées vérifient le système d'équations paramétriques de (d). Résolvons donc le système $\begin{cases} x=3+2t \\ -4=1-2t \\ z=-1-t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x=3+2t \\ -4=1-2t \\ z=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2t \\ t=\frac{5}{2} \\ z=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ x=3+2\times\frac{5}{2} \\ z=-1-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ x=8 \\ z=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Le point de $(\boldsymbol{d})$ ayant -4 pour ordonnée a pour coordonnées $\left(\mathbf{8\,;-4\,;\,-\frac{7}{2}}\right)$. Ce point est obtenu lorsque le paramètre t est égal à $\frac{5}{2}$.

4) Donnons les coordonnées du point de (d) ayant 6 pour cote.

Cherchons donc le point de coordonnées $(x\,;y\,;6)$. Comme ce point appartient à (d), ses coordonnées en vérifient le système d'équations paramétriques. Résolvons donc le système $\begin{cases} x=3+2t \\ y=1-2t \\ 6=-1-t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=1-2t \\ 6=-1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2t \\ y=1-2t \\ t=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-7 \\ x=3+2\times(-7) \\ y=1-2\times(-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-7 \\ x=-11 \\ y=15 \end{cases}$$

Le point de (d) ayant 6 pour cote a pour coordonnées $(-11\,;15\,;\,6)$. Ce point est obtenu lorsque le paramètre t est égal à -7.

5) Soit le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$.

1ère méthode :

Ce point a pour abscisse -5. Or, lorsque $x=-5$, on a $-5=3+2t$, c'est-à-dire $t=-4$. Calculons les autres coordonnées du point de (d) lorsque $t=-4$.

Or, si $t=-4$, alors $y=1-2t=1-2\times(-4)=9$ et $z=-1-t=-1-(-4)=3\neq 4$.

Autrement dit, **le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$ n'appartient pas à (d)**.

Remarque : En revanche, le point de coordonnées $(-5\,;9\,;3)$ appartient à (d). C'est le point de (d), de paramètre $t=-4$.

2e méthode :

Vérifions si le système $\begin{cases}-5=3+2t\\9=1-2t\\4=-1-t\end{cases}$ admet une solution réelle unique.

$$\begin{cases}-5=3+2t\\9=1-2t\\4=-1-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8=2t\\8=-2t\\5=-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-5\end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc **le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$ n'appartient pas à (d).**

6) Donnons un vecteur directeur de (d).

Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases}x=3+2t\\y=1-2t\\z=-1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\begin{cases}x=3+2t\\y=1+(-2)t\\z=-1+(-1)t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Par conséquent, **un vecteur directeur de (d) est $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$**.

7) Donnons le vecteur directeur de (d) de cote 7.

1ère méthode :

On cherche le vecteur directeur $\vec{v}$ de (d), de cote $z_{\vec{v}}=7$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x_{\vec{v}}\\y_{\vec{v}}\\7\end{pmatrix}$. Or, d'après la question précédente, un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, vecteur de cote $z_{\vec{u}}=-1$. Ainsi, $z_{\vec{v}}=-7z_{\vec{u}}$. Le vecteur directeur $\vec{v}$ recherché est donc colinéaire à $\vec{u}$ tel que $\vec{v}=-7\vec{u}$.

Par conséquent, **le vecteur directeur de (d) ayant 7 pour cote est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-14\\14\\7\end{pmatrix}$**.

2ème méthode :

On cherche le vecteur directeur $\vec{v}$ de (d), de cote $z_{\vec{v}} = 7$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ 7 \end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, vecteur de cote $z_{\vec{u}} = -1$. Comme $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, leurs coordonnées sont proportionnelles. Ainsi, on a : $\frac{x_{\vec{v}}}{2} = \frac{y_{\vec{v}}}{-2} = \frac{7}{-1}$. Il vient alors que $y_{\vec{v}} = \frac{7\times(-2)}{-1} = 14$ et $x_{\vec{v}} = \frac{7\times 2}{-1} = -14$.

Par conséquent, **le vecteur directeur de (d) ayant 7 pour cote est le vecteur de coordonnées** $\begin{pmatrix} \mathbf{-14} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A(-1\,;\,3\,;\,1)$ sur la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 6 — *↻ Retour au menu*

Rappel : Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Dire qu'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et qu'un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à dire que leur produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul. Dans un repère orthonormal de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}} \times z_{\vec{v}} = 0$.

Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ donc (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Notons $H(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ le projeté orthogonal de A sur (d). Comme H est le projeté orthogonal de A sur (d), il vient que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$.

En utilisant la représentation paramétrique de (d), il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 2-2t \\ z_H = 3+3t \end{cases}$. Dès lors, il vient que $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1+2t-(-1) \\ 2-2t-3 \\ 3+3t-1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2t \\ -2t-1 \\ 3t+2 \end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AH}} \times x_{\vec{u}} + y_{\overrightarrow{AH}} \times y_{\vec{u}} + z_{\overrightarrow{AH}} \times z_{\vec{u}} = 0$

$\Leftrightarrow 2t \times 2 + (-2t-1) \times (-2) + (3t+2) \times 3 = 0 \Leftrightarrow 4t + 4t + 2 + 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow 17t = -8 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{17}$

Le point H est donc le point de (d), de paramètre $t = -\frac{8}{17}$. Ainsi, les coordonnées de H sont données par $\begin{cases} x_H = -1+2\times\left(-\frac{8}{17}\right) \\ y_H = 2-2\times\left(-\frac{8}{17}\right) \\ z_H = 3+3\times\left(-\frac{8}{17}\right) \end{cases}$.

Finalement, **le point H, projeté orthogonal de A sur (d), a pour coordonnées** $\left(-\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{17}}\,;\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{17}};\,\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{17}}\right)$.

Exercice 7 *(2 questions)* *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = -1+3t' \\ y = -2+t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Démontrer que les droites (d) et (d') sont sécantes.
2) Préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

Correction de l'exercice 7 ↻ *Retour au menu*

1) Démontrons que les droites (d) et (d') sont sécantes.

Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Une représentation paramétrique de (d') est $\begin{cases} x = -1+3t' \\ y = -2+t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

Or, comme il n'existe aucun réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Il s'ensuit que les droites (d) et (d') sont soit coplanaires et sécantes soit non coplanaires et jamais sécantes.

Remarque importante : Attention ! Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas nécessairement sécantes. Elles peuvent être non coplanaires et ne jamais être sécantes.

$$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases} et \begin{cases} x = -1+3t' \\ y = -2+t' \\ z = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t = -1+3t' \\ -1+t = -2+t' \\ 1+t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t' = -3 \\ t = -1+t' \\ t = -1+t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1+t' \\ 2(-1+t')-3t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1+t' \\ -2+2t'-3t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1+t' \\ -t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le système admet pour solution le couple $(t\,;t') = (0\,;1)$ donc les droites (d) et (d') sont sécantes.

2) Précisons les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') sont donc obtenues, soit en remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de (d), soit en remplaçant t' par 1 dans la représentation paramétrique de (d).

Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ donc les coordonnées de l'unique point de (d), de paramètre $t = 0$, vérifient ce système d'équations paramétriques pour $t = 0$.

Ainsi, **le point d'intersection de (d) et (d') a pour coordonnées** $(2+2\times 0\,;\,-1+0\,;\,1+0)$, c'est-à-dire $(\mathbf{2}\,;\,\mathbf{-1}\,;\mathbf{1})$.

Exercice 8 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = -2m^2 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'intersection des deux droites.

Correction de l'exercice 8 — *↻ Retour au menu*

$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -2m^2 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} 1 - mt = -2m^2 - t' \\ 1 + t = 2 + 2t' \\ -3 + t = t' \end{cases}$ $\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} 2m^2 - mt + t' + 1 = 0 \\ t = 1 + 2t' \\ -3 + 1 + 2t' = t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} 2m^2 - mt + t' + 1 = 0 \\ t = 1 + 2t' \\ t' = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} 2m^2 - mt + t' + 1 = 0 \\ t' = 2 \\ t = 1 + 2 \times 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} 2m^2 - mt + t' + 1 = 0 \\ t' = 2 \\ t = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} t = 5 \\ t' = 2 \\ 2m^2 - 5m + 2 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(t\,;t';m) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} t = 5 \\ t' = 2 \\ 2m^2 - 5m + 3 = 0 \end{cases}$

Posons Δ le discriminant du trinôme du second degré $2m^2 - 5m + 3$. Alors $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1$.

$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles m_1 et m_2 distinctes :

$$m_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1 \qquad\qquad m_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$$

Par conséquent, 3 cas de figure sont à envisager :

- ✓ **si $m = 1$, alors les droites (d) et (d') sont sécantes.**

Leur point d'intersection a pour coordonnées $(1 - 1 \times 5\,;1 + 5\,;\ -3 + 5)$, c'est-à-dire $(-4\,;6\,;\ 2)$.

On note $(d) \cap (d') = \{(\mathbf{-4}\,;\mathbf{6}\,;\ \mathbf{2})\}$.

- ✓ **si $m = \frac{3}{2}$, alors les droites (d) et (d') sont sécantes.**

Leur point d'intersection a pour coordonnées $\left(1 - \frac{3}{2} \times 5\,;1 + 5\,;\ -3 + 5\right)$, c'est-à-dire $\left(-\frac{13}{2}\,;6\,;\ 2\right)$.

On note $(\boldsymbol{d}) \cap (\boldsymbol{d}') = \left\{\left(-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}} \,;\mathbf{6}\,;\, \mathbf{2}\right)\right\}$.

✓ **si $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\mathbf{1}\,;\,\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right\}$, alors les droites $(\boldsymbol{d})$ et $(\boldsymbol{d}')$ ne sont pas sécantes.**

On note $(\boldsymbol{d}) \cap (\boldsymbol{d}') = \emptyset$.

Remarque : Dans ce dernier cas, comme elles ne sont pas sécantes, les droites (d) et (d') sont soit coplanaires et confondues, soit coplanaires et parallèles, soit non coplanaires.

Or, une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ donc un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En outre, une représentation paramétrique de (d') est $\begin{cases} x = -2m^2 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$ donc un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les cotes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égales mais par leurs ordonnées ; il n'existe donc aucun réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d') ne sont ni confondues ni parallèles. Finalement, si $m \in \mathbb{R}\backslash\left\{1\,;\,\frac{3}{2}\right\}$, alors les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Exercice 9 *(3 questions)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Déterminer l'intersection de la droite (d) dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et passant par $A(1\,;2\,;3)$:

1) avec le plan (xOy)
2) avec le plan (xOz)
3) avec le plan (yOz)

Correction de l'exercice 9 — ↻ *Retour au menu*

1) Déterminons l'intersection de la droite (d) avec le plan (xOy).

La droite (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et passe par $A(1\,;2\,;3)$ donc une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases}x = 1+3t\\ y = 2+2t\\ z = 3+t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

De plus, une équation du plan (xOy) est $z = 0$.

$$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (xOy) \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 2+2t\\ z = 3+t\end{cases} et\ z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 2+2t\\ z = 0\\ 0 = 3+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 2+2t\\ z = 0\\ t = -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3\times(-3)\\ y = 2+2\times(-3)\\ z = 0\\ t = -3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -8\\ y = -4\\ z = 0\\ t = -3\end{cases}$$

La droite (d) et le plan (xOy) ont pour intersection le point de coordonnées $(-8\,;\,-4\,;0)$.

2) Déterminons l'intersection de la droite (d) avec le plan (xOz).

Une équation du plan (xOz) est $y = 0$.

$$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (xOz) \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 2+2t\\ z = 3+t\end{cases} et\ y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 0\\ z = 3+t\\ 0 = 2+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3t\\ y = 0\\ z = 3+t\\ t = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1+3\times(-1)\\ y = 0\\ z = 3+(-1)\\ t = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -2\\ y = 0\\ z = 2\\ t = -1\end{cases}$$

La droite (d) et le plan (xOz) ont pour intersection le point de coordonnées $(-2\,;\,0\,;2)$.

3) Déterminons l'intersection de la droite (d) avec le plan (yOz).

Une équation du plan (yOz) est $x = 0$.

$$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (yOz) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} et\ x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \\ 0 = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ z = 3 + \left(-\frac{1}{3}\right) \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{8}{3} \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La droite $(\boldsymbol{d})$ et le plan $(\boldsymbol{yOz})$ ont pour intersection le point de coordonnées $\left(\mathbf{0}\,;\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\,;\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right)$.

Exercice 10 *(1 question)* *Niveau : moyen*

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ dans lequel on place les points $A(1\,;\,-1\,;2)$, $B(-2\,;1\,;1)$, $C(1\,;0\,;-1)$ et $D(-1\,;2\,;3)$. Etudier l'intersection de la sphère de diamètre $[AB]$ et de la droite (CD).

Correction de l'exercice 10 *↻ Retour au menu*

1) Dans un premier temps, déterminons une représentation paramétrique de (d), droite passant par C et D.

Un vecteur directeur de cette droite est le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. De plus, $C(1\,;0\,;-1)$ appartient à (d) donc une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$.

2) Dans un second temps, déterminons une équation de la sphère (S) de diamètre $[AB]$.

$M(x\,;y\,;z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. Or, $\overrightarrow{MA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \\ 2-z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(-2-x) + (-1-y)(1-y) + (2-z)(1-z) = 0$

$\Leftrightarrow -2 - x + 2x + x^2 - 1 + y - y + y^2 + 2 - 2z - z + z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 1 = 0$

Une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ est donc $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 1 = 0$.

3) Déterminons désormais l'éventuelle intersection de (S) et (d).

$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $et\ x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \\ (1-2t)^2 + (2t)^2 + (-1+4t)^2 + 1 - 2t - 3(-1+4t) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \\ 1 - 4t + 4t^2 + 4t^2 + 1 - 8t + 16t^2 + 1 - 2t + 3 - 12t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \\ 24t^2 - 26t + 5 = 0 \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant du trinôme du second degré $24t^2 - 26t + 5$. Alors $\Delta = (-26)^2 - 4 \times 24 \times 5 = 196$. $\Delta > 0$ donc le trinôme admet 2 racines réelles distinctes :

$$t_1 = \frac{-(-26) - \sqrt{196}}{2 \times 24} = \frac{26 - 14}{48} = \frac{1}{4} \qquad t_2 = \frac{-(-26) + \sqrt{196}}{2 \times 24} = \frac{26 + 14}{48} = \frac{5}{6}$$

Ainsi, on a :

$$M(x\,;y\,;z)\in(d)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2t\\y=2t\\z=-1+4t\\t_1=\frac{1}{4}\end{cases}ou\begin{cases}x=1-2t\\y=2t\\z=-1+4t\\t_2=\frac{5}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2\times\frac{1}{4}\\y=2\times\frac{1}{4}\\z=-1+4\times\frac{1}{4}\\t_1=\frac{1}{4}\end{cases}ou\begin{cases}x=1-2\times\frac{5}{6}\\y=2\times\frac{5}{6}\\z=-1+4\times\frac{5}{6}\\t_2=\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\\z=0\\t_1=\frac{1}{4}\end{cases}ou\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=\frac{5}{3}\\z=\frac{7}{3}\\t_2=\frac{5}{6}\end{cases}$$

La sphère de diamètre $[AB]$ et la droite (CD) ont deux points d'intersection E et F de coordonnées :

$\boldsymbol{E\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)\ et\ F\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\frac{7}{3}\right)}$.

Exercice 11 *(2 questions)* *Niveau : moyen*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = -2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = 1+4t' \\ y = -3-2t' \\ z = 2+2t' \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires.
2) Donner une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

Correction de l'exercice 11 ↻ *Retour au menu*

1) Montrons que les droites (d) et (d') sont coplanaires.

Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = -2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Par conséquent, (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (d') est $\begin{cases} x = 1+4t' \\ y = -3-2t' \\ z = 2+2t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$. Par conséquent, (d') est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{v} = -2\vec{u}$. Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il s'ensuit que **les droites (d) et (d') sont coplanaires**.

2) Donnons une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant colinéaires, les droites (d) et (d') sont soit parallèles soit confondues. Montrons qu'elles ne sont pas confondues.

D'après la représentation paramétrique de (d), on déduit que $A(-1\,;\,-2\,;3) \in (d)$. Vérifions que $A \notin (d')$.

$$A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} et \begin{cases} x = 1+4t' \\ y = -3-2t' \\ z = 2+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 1+4t' \\ -2 = -3-2t' \\ 3 = 2+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{1}{2} \\ t' = -\dfrac{1}{2} \\ t' = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc $A \notin (d')$.

Finalement, les droites (d) et (d') sont strictement parallèles. Cherchons désormais une équation du plan (P) qu'elles déterminent.

D'après la représentation paramétrique de (d'), on déduit que $B(1\ ;\ -3\ ;2) \in (d')$. Il vient alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, n'étant pas colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (P).

Cherchons désormais un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à ce plan, où a, b et c désignent des réels non tous nuls.

D'une part, $\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a \times (-2) + b \times 1 + c \times (-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b - c = 0\ (E1)$

D'autre part, $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow a \times 2 + b \times (-1) + c \times (-1) = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0\ (E2)$

Dès lors, $(E1) + (E2) \Leftrightarrow -2c = 0 \Leftrightarrow c = 0$ et $(E1) - (E2) \Leftrightarrow -4a + 2b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$.

Ainsi, en posant par exemple $a = 1$, on obtient que $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

Finalement, (P) est le plan passant par $A(-1\ ;\ -2\ ;3)$ et admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

$M(x\ ;y\ ;z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x+1) \times 1 + (y+2) \times 2 + (z-3) \times 0 = 0 \Leftrightarrow x + 1 + 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0$

Une équation cartésienne du plan déterminé par les droites $(\boldsymbol{d})$ et $(\boldsymbol{d'})$ est $\boldsymbol{x + 2y + 5 = 0}$.

Exercice 12 *(3 questions)* ***Niveau : moyen***

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ dans lequel on place les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(-2\,;\,1\,;\,2)$, $C(-1\,;3\,;2)$ et $D(0{,}5\,;-1{,}5\,;3{,}5)$.

1) Donner une représentation paramétrique du segment $[AB]$.
2) Donner une représentation paramétrique de la demi-droite $[CD)$.
3) Montrer que $[AB]$ et $[CD)$ sont sécants et préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

Correction de l'exercice 12 *↻ Retour au menu*

1) Donnons une représentation paramétrique du segment $[AB]$.

Rappel : Représentation paramétrique d'un segment

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient $A(x_A\,;\,y_A;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B;\,z_B)$ deux points distincts.

Dire qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à $[AB]$ équivaut à dire qu'il existe un réel $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}\,;\mathbf{1}]$ vérifiant le système d'équations paramétriques de paramètre t suivant : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} \times t \end{cases}$

Le segment $[AB]$ est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Or, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M(x\,;\,y\,;\,z) \in [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} \times t \end{cases} (t \in [0\,;1]) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in [0\,;1])$

$\boldsymbol{\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in [0\,;1])}$ **est une représentation paramétrique du segment** $[\boldsymbol{AB}]$.

2) Donnons une représentation paramétrique de la demi-droite $[CD)$.

Rappel : Représentation paramétrique d'une demi-droite

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient $A(x_A\,;\,y_A;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B;\,z_B)$ deux points distincts.

Dire qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à $[AB)$ équivaut à dire qu'il existe un réel $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}\,;\,+\infty[$ vérifiant le système d'équations paramétriques de paramètre t suivant : $\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} \times t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} \times t \end{cases}$

La demi-droite $[CD)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CD}$. Or, $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M(x\,;\,y\,;\,z) \in [CD) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_C + x_{\overrightarrow{CD}} \times t' \\ y = y_C + y_{\overrightarrow{CD}} \times t' \\ z = z_C + z_{\overrightarrow{CD}} \times t' \end{cases} (t' \in [0\,;\,+\infty[) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 1{,}5t' \\ y = 3 - 4{,}5t' \\ z = 2 + 1{,}5t' \end{cases} (t' \in [0\,;\,+\infty[)$

$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 1{,}5t'} \\ \boldsymbol{y = 3 - 4{,}5t'} \\ \boldsymbol{z = 2 + 1{,}5t'} \end{cases}$ **$(t' \in [0\,;\,+\infty[)$ est une représentation paramétrique de la demi-droite $[CD)$.**

3) Montrons que $[AB]$ et $[CD)$ sont sécants et précisons les coordonnées de leur point d'intersection.

$M(x\,;y\,;z) \in [AB] \cap [CD) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in [0\,;1])\ et \begin{cases} x = -1 + 1{,}5t' \\ y = 3 - 4{,}5t' \\ z = 2 + 1{,}5t' \end{cases} (t' \in [0\,;\,+\infty[)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3t = -1 + 1{,}5t' \\ 2 - t = 3 - 4{,}5t' \\ 3 - t = 2 + 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \\ t' \in [0\,;\,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ -t + 4{,}5t' = 1 \\ t = 1 - 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \\ t' \in [0\,;\,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ -(1 - 1{,}5t') + 4{,}5t' = 1 \\ t = 1 - 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \\ t' \in [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ -1 + 1{,}5t' + 4{,}5t' = 1 \\ t = 1 - 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \\ t' \in [0\,;\,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ 6t' = 2 \\ t = 1 - 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \\ t' \in [0\,;\,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ t' = \frac{1}{3} \\ t = 1 - 1{,}5t' \\ t \in [0\,;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ t' = \frac{1}{3} \\ t = 1 - 1{,}5 \times \frac{1}{3} \\ t \in [0\,;1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t - 1{,}5t' = -2 \\ t = 0{,}5 \\ t' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le système admet pour solution le couple $(t\,;t') = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$ donc $[AB]$ et $[CD)$ sont sécants.

Le point du segment $[AB]$, de paramètre $t = \frac{1}{2}$, a pour coordonnées $\begin{cases} x = 1 - 3 \times \frac{1}{2} \\ y = 2 - \frac{1}{2} \\ z = 3 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}.$

Le point d'intersection de $[AB]$ et $[CD)$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2};\,\frac{5}{2}\right)$.