

. Les symboles Σ et Π

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.)

- 1) (*) Calculer $\sum_{i=3}^n i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
- 2) (*) Calculer le nombre $1, 1111\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1, \underbrace{11\dots 1}_n$ et le nombre $0, 9999\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0, \underbrace{99\dots 9}_n$.
- 3) (*) Calculer $\underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) (*) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
- 5) (**) Calculer $\sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 6) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$. (Indication : calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.)
- 7) (***) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 8) (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
 - a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice n° 2. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes télescopiques.)

Calculer les sommes suivantes :

- 1) (**) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- 2) (**) $\sum_{k=0}^n k \times k!$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- 3) (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p + 1$ tel que $P_p(x + 1) - P_p(x) = x^p$).
- 4) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$. (Indication : calculer $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C_n$ (on donne $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$)).

Exercice n° 3. (IT)

Calculer les sommes suivantes :

- 1) (**) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.
- 2) (**) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$.

3) (*) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij.$

4) (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice n° 4. (IT)

1) (*) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (***) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$ (indication : on sait que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.)

Les symboles Σ et Π : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $n \geq 3$.

$$\sum_{i=3}^n i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 1, \underbrace{11\dots1}_n$. On a

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \times 10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9 \times 10^n}$ tend vers 0, et donc u_n tend vers $\frac{10}{9}$.

$$1,1111\dots = \frac{10}{9}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 0, \underbrace{99\dots9}_n$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc u_n tend vers 1.

$$0,9999\dots = 1.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \underbrace{1-1+1-\dots+(-1)^{n-1}}_n$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\pi/2} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n i^k \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{(n+1)i\pi/2}}{1 - e^{i\pi/2}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4} - 2i \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{e^{i\pi/4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N} + 1) \\ 0 & \text{si } n \in (4\mathbb{N} + 2) \cup (4\mathbb{N} + 3) \end{cases} \end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$, on a immédiatement $S_{4n} = S_0 = 1$, $S_{4n+1} = S_1 = 1$, $S_{4n+2} = S_2 = 0$ et $S_{4n+3} = S_3 = 0$.

6) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k.$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1)/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \operatorname{Re}(C_n + iS_n) = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad S_n = \operatorname{Im}(C_n + iS_n) = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

7) Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} (1 - (-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S'_n(t) dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \ln(1+x).$$

En particulier,

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$$

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n - 3 = -2 \times 2^n$ et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 3 - 2 \sum_{k=0}^n 2^k = 3(n+1) - 2 \frac{2^{n+1} - 1}{2-1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Exercice n° 2.

1) Pour tout naturel non nul k , on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k , on a $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$ et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k , $k \times k! = (k+1-1) \times k! = (k+1) \times k! - k! = (k+1)! - k!$ puis

$$\sum_{k=0}^n k \times k! = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k ,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1-1)}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

puis

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Calcul de S_1 .** Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_1(X+1) - P_1(X) = X &\Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a+b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} \Leftrightarrow P_1 = \frac{X(X-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Calcul de S₂**. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a + 2b)X + a + b + c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a + 2b = 0 \text{ et } a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} \Leftrightarrow P_2 = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Calcul de S₃**. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a + 3b)X^2 + (4a + 3b + 2c)X + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1, 6a + 3b = 0, 4a + 3b + 2c = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftrightarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} \Leftrightarrow P_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- **Calcul de S₄**. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2) \\ &\quad + e((X+1) - X) \\ &= 5aX^4 + (10a + 4b)X^3 + (10a + 6b + 3c)X^2 + (5a + 4b + 3c + 2d)X + a + b + c + d + e. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1, 10a + 4b = 0, 10a + 6b + 3c = 0, 5a + 4b + 3c + 2d = 0 \\ &\quad \text{et } a + b + c + d + e = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30} \\ &\Leftrightarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} \Leftrightarrow P_4 = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \sum_{k=1}^n (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\theta}{2} C_n &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \theta \right) + \sin \left(\left(-k + \frac{1}{2}\right) \theta \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + 1\right) - \frac{1}{2} \right) \theta \right) - \sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \theta \right) \\ &= \sin \left(\left(n + 1\right) - \frac{1}{2} \right) \theta - \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

- **1er cas.** Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\frac{\theta}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ puis $\sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$. On peut alors écrire $C_n = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

- **2ème cas.** Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n + 1$.

Exercice n° 3.

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1 ère solution.
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2 ème solution. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$ est le nombre de couples (i, j) d'entiers compris au sens large entre 1 et n tels que $i < j$. Il y

a n^2 couples (i, j) d'entiers compris au sens large entre 1 et n .

Parmi ces n^2 couples, il y en a n tels que $i = j$ et donc $n^2 - n = n(n-1)$ tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$. Comme il y a autant de couples (i, j) tels que $i > j$ que de couples (i, j) tels que $i < j$, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$. Finalement,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n nj = n \sum_{j=1}^n j = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} j &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n (j-1)j = \sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'exercice n° 2, question 3), on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^2 k^2 = \left(\sum_{h=1}^n h^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2.$$

Comme d'autre part, $\sum_{h=1}^n h^4 = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ d'après l'exercice n° 2, question 3), on a

$$\sum_{1 \leq h, k \leq n} h^4 = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n h^4 \right) = \sum_{h=1}^n n h^4 = n \sum_{h=1}^n h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\sum_{1 \leq h, k \leq n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^5} \left(2 \times 5 \times \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18 \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} \right) \\ &= \frac{1}{n^5} \left(\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{3} - \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^5} \left(2n^6 - 2n^6 + n^5 \left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2} \right) + \text{termes de degré au plus 4} \right) \\ &= -1 + \text{termes tendant vers 0} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Exercice n° 4.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1 \text{ (produit télescopique).}$$

2) Soit $a \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k , on a $0 < \frac{a}{2^k} \leq \frac{a}{2} < \pi$ et donc $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$. On sait alors que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Par suite, pour tout naturel k ,

$$\sin \left(2 \times \frac{a}{2^k} \right) = 2 \sin \frac{a}{2^k} \cos \frac{a}{2^k} \text{ et donc } \cos \frac{a}{2^k} = \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n} \frac{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^n \sin(a/2^k)} = \frac{\sin a}{2^n \sin(a/2^n)} \text{ (produit télescopique).}$$