Sommes

☞ **Exercice 1.** *Calculs élémentaires.*
Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$:

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (0,5)^k$

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-2)$

Exercice 2. *Calculs élémentaires.*
Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i + 2i + 3$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$

☞ **Exercice 3.** *Binôme de Newton.*
Soit $f : x \longmapsto (1+x)^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

☞ **Exercice 4.** *Inégalité de Bernoulli.*
Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout entier naturel n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 5. *Récurrence.*
Montrer par récurrence sur n :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

d. Pour tout $k \leq n$, $\displaystyle\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$

f. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n^2+n}{2}$

Exercice 6. *Sommes téléscopiques.*
Calculer S_n puis en déduire la limite de (S_n) quand n tend vers $+\infty$.

a. $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

b. $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

c. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d. $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$

e. $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

f. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$

✭ **Exercice 7.** *Calculs.*
Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} |k-n|$

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min\{k, n\}$

Exercice 8. *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$

b. $\displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^{2i-j}$

Exercice 9. *Sommes triangulaires.*
Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

b. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$

c. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$

d. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} |i-j|$

☆ Exercice **10.** *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes (on déduira $b.$ de $a.$ et $c.$ de $a.$ et $b.$) :

a. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min\{i,j\}$ ***b.*** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max\{i,j\}$ ***c.*** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$

☆ Exercice **11.** *Autre calcul.*
Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Produits

☞ Exercice **12.** *Factorielle.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$, puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factorielles.

Exercice **13.** *Récurrence.*
Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

a. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$

b. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in]0,1[$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exercice **14.** *Produits téléscopiques.*
Calculer P_m puis en déduire la limite de (P_m) quand m tend vers $+\infty$.

a. $P_m = \displaystyle\prod_{n=2}^{m}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ***b.*** $P_m = \displaystyle\prod_{n=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$