

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث : $M \in (\Delta)$

1. أرسم شكلاً تقريبياً

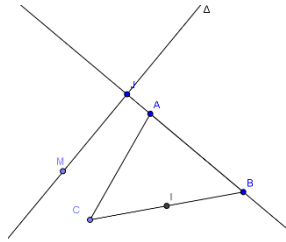
2. بين أن : $AB = 6$ وأحسب AC

3. أحسب : $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$

4. بين أن : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 45$

5. أحسب : BI

(الجواب: 1)



(2) لدينا

$$\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12 \text{ يعني } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$$

$$AB^2 \times \frac{1}{3} = 12 \text{ يعني } BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12$$

يعني $AB^2 = 36$ يعني $AB = 6$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$

$$AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$$

يعني : $AC = \sqrt{54}$ يعني $AC^2 = 54$

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4} BA^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45 \quad (3)$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (4)$$

لدينا $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ لأن $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BJ}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = 45$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$\text{يعني : } AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} AC^2$$

$$6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} \sqrt{54}^2$$

يعني : $72 = 2BI^2 + 27$ يعني : $45 = 2BI^2$ يعني :

$$BI^2 = \frac{45}{2}$$

$$BI = \sqrt{\frac{45}{2}} \text{ يعني}$$

تمرين 3: ليكن ABC مثلثاً بحيث : $AB = 1$ و $AC = 3$

$$\text{و } CAB = \frac{2\pi}{3} \text{ وليكن } I \text{ منتصف القطعة } [AB]$$

تمرين 1: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{1}{4} \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$$

و I نقطة بحيث $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}$ و J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من I والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة E بحيث : $E \in (\Delta)$

(1) أرسم شكلاً تقريبياً

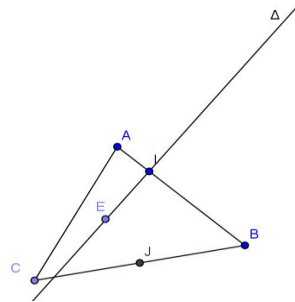
(2) بين أن : $AB = 8$ وأحسب BC

(3) أحسب : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$

(4) بين أن : $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = 48$

(5) أحسب : AJ

(الجواب: 1)



(2) لدينا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$

يعني

$$AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$$

$$AB^2 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ يعني } AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16$$

يعني $AB^2 = 64$ يعني $AB = 8$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

$$BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$$

يعني : $BC = \sqrt{96}$ يعني $BC^2 = 96$

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4} BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48 \quad (3)$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (4)$$

لدينا $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ لأن $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{AB}$

ومنه :

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BI}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = 48$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} \sqrt{96}^2 \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

يعني : $128 = 2AJ^2 + 48$ يعني : $80 = 2AJ^2$ يعني :

$$AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

تمرين 2: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

$$\text{بحيث: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \text{ و } \cos(\hat{ABC}) = \frac{1}{3}$$

و J نقطة بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن

$$(1) \text{ أثبت أن : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ نعتبر النقطة E بحيث } \overline{BE} = \frac{1}{5} \overline{BC}$$

$$(أ) \text{ بين أن : } \overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC}$$

$$(ب) \text{ أحسب } \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

$$(ج) \text{ بين أن : } (AB) \perp (IE)$$

أجوبة :

$$(1) \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos CAB$$

$$\text{يعني : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \times 3 \times \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{يعني : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \times 3 \times \cos \left(\frac{3\pi - \pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \times 3 \times \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ نعتبر النقطة E بحيث } \overline{BE} = \frac{1}{5} \overline{BC}$$

$$(أ) \text{ نبين أن : } \overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC} \quad ?$$

$$\overline{BA} + \overline{AE} = \frac{1}{5} (\overline{BA} + \overline{AC}) \text{ يعني } \overline{BE} = \frac{1}{5} \overline{BC}$$

$$\overline{AE} = -\overline{BA} + \frac{1}{5} \overline{BA} + \frac{1}{5} \overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \frac{1}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \frac{5}{5} \overline{AB} - \frac{1}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC}$$

$$(أ) \text{ حساب } \overline{AB} \cdot \overline{AE} \quad ?$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \left(\frac{4}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC} \right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB}^2 + \frac{1}{5} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB}^2 + \frac{1}{5} \times \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{4}{5} \times 1^2 - \frac{3}{10}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$(ج) \text{ يكفي أن بين أن : } \overline{AB} \cdot \overline{IE} = 0$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{IE} = \overline{AB} \cdot (\overline{IA} + \overline{AE})$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{IE} = \overline{AB} \cdot \overline{IA} + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

$$[AB] \text{ منتصف القطعة } \overline{BA} : \text{ لأن } \overline{AB} \cdot \overline{IE} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{BA}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{IE} = \overline{AB} \cdot \left(-\frac{\overline{AB}}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{IE} = -\frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{AB^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{IE} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

ومنه المستقيمين (AB) و (IE) متعامدان

$$\text{أي : } (AB) \perp (IE)$$

تمرين 4:

ليكن ABCD متوازي الأضلاع مركزه I

$$\text{بحيث : } BI = 2\sqrt{3} \text{ و } AC = 10 \text{ و } AIB = \frac{\pi}{6}$$

$$(1) \text{ أ) أحسب } \overline{IA} \cdot \overline{IB}$$

$$\text{ب) استنتج أن : } AB = \sqrt{7}$$

$$(2) \text{ بين أن : } BA^2 + BC^2 = 74 \text{ ثم استنتج أن :}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 20$$

$$(3) \text{ نعتبر النقطة E بحيث } \overline{AE} = \frac{5}{8} \overline{AD}$$

$$(أ) \text{ بين أن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8} (\overline{AC}^2 - 5 \overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

ب) استنتج أن : المستقيمين (AC) و (IC) متعامدان

أجوبة :

$$(1) \text{ أ) حساب } \overline{IA} \cdot \overline{IB}$$

$$\text{لدينا I منتصف القطعة } [AC] \text{ ومنه } IA = IC = 5$$

$$\text{اذن : } \overline{IA} \cdot \overline{IB} = IA \times IB \cos(\hat{AIB})$$

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = 5 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15$$

$$\text{ب) استنتج أن : } AB = \sqrt{7}$$

باستعمال مبرهنة الكاشي علي المثلث AIB

$$\text{نجد : } AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2 \overline{IA} \cdot \overline{IB}$$

$$\text{يعني : } AB^2 = 25 + 12 - 30 = 7$$

$$\text{ومنه : } AB = \sqrt{7}$$

$$(2) \text{ نبين أن : } BA^2 + BC^2 = 74 \text{ ثم نستنتج أن :}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 20$$

بتطبيق مبرهنة المتوسط على المثلث ABC

$$\text{نجد : } BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\text{يعني : } BA^2 + BC^2 = 24 + 50 = 74$$

ومنه المستقيمين (MB) و (AC) متعامدين

أي : $(IE) \perp (AC)$

تمرين 5:

ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A

بحيث : $AB = \sqrt{2}$ و $BAC = \frac{\pi}{6}$ و I منتصف القطعة

[AB]

(1) أحسب BC

(2) باستعمال مبرهنة الكاشي علي المثلث ABC

بين أن : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) أحسب CI

أجوبة: (1) حساب BC

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين في A إذن :

$$AB = AC = \sqrt{2}$$

باستعمال مبرهنة الكاشي علي المثلث ABC

نجد : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos BAC$

$$BC^2 = 2 + 2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 : \text{ إذن :}$$

$$BC^2 = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3} \text{ إذن :}$$

$$BC^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2 \text{ إذن :}$$

$$BC^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 \text{ إذن :}$$

$$BC = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 \text{ ومنه :}$$

$$(2) \text{ نبين أن : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

في المثلث ABC لدينا : $A + B + C = \pi$

$$\text{وبما أن : } A = \frac{\pi}{6} \text{ و } B = C \text{ فإن : } \frac{\pi}{6} + 2B = \pi$$

$$\text{يعني : } 2B = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{يعني : } B = \frac{5\pi}{12} \text{ يعني : } B = \frac{5\pi}{12}$$

باستعمال مبرهنة الكاشي علي المثلث ABC

نجد : $CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos B$

$$\text{يعني : } \cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - CA^2}{2BA \times BC}$$

$$\text{يعني : } \cos B = \frac{BC^2}{2BA \times BC} = \frac{BC}{2BA}$$

$$\text{يعني : } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

وباستعمال مبرهنة الكاشي علي المثلث ABC

$$\text{نجد : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{يعني : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

ونعلم أن : $BA^2 + BC^2 = 74$

ومنه : $BC^2 = 74 - BA^2$

ثم نعوض BC^2 بقيمتها فنجد :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - 74 + BA^2)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(2AB^2 + AC^2 - 74)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(14 + 10 - 74) = 20$$

$$(3) \text{ لدينا } \overline{AE} = \frac{5}{8}\overline{AD}$$

$$(أ) \text{ نبين أن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}(\overline{AC}^2 - 5\overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

$$\overline{IE} \cdot \overline{AC} = (\overline{IA} + \overline{AE}) \cdot \overline{AC} = \overline{IA} \cdot \overline{AC} + \overline{AE} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{لأن I منتصف القطعة } [AC] \text{ ونعلم أن } ABCD \text{ متوازي الأضلاع}$$

إذن : $\overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AC} + \frac{5}{8}\overline{AD} \cdot \overline{AC}$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}AC^2 + \frac{5}{8}\overline{BC} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}AC^2 + \frac{5}{8}(\overline{BA} + \overline{AC}) \cdot \overline{AC}$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}AC^2 + \frac{5}{8}(\overline{BA} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AC})$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}AC^2 + \frac{5}{8}(AC^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2}AC^2 + \frac{5}{8}AC^2 - \frac{5}{8}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}AC^2 - \frac{5}{8}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}(AC^2 - 5\overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

(ب) استنتاج أن : المستقيمين (AC) و (IC) متعامدان

نعلم أن : $AC = 10$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 20$

$$\text{وأن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}(AC^2 - 5\overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

$$\text{إذن : } \overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}(100 - 5 \times 20)$$

$$\overline{IE} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{8}(100 - 100) = 0$$

وجدنا $\overline{IE} \cdot \overline{AC} = 0$ إذن : $\overline{IE} \perp \overline{AC}$

(3) حساب CI

بتطبيق مبرهنة المتوسط على المثلث ABC وباعتبار أن I

منتصف القطعة [AB]

$$\text{نجد : } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$CI^2 = \frac{1}{2} \left(BC^2 + AC^2 - \frac{AB^2}{2} \right) \text{ يعني}$$

$$CI^2 = \frac{1}{2} (4 - 2\sqrt{3} + 2 - 1) \text{ يعني}$$

$$CI^2 = \frac{1}{2} (5 - 2\sqrt{3}) \text{ يعني}$$

$$CI = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{3}}{2}} \text{ ومنه}$$

تمرين 6: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$$\overline{BI} = \frac{3}{4} \overline{BA} \text{ نقطة بحيث } \cos(\hat{A}) = \frac{1}{4} \text{ و } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$$

و J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن (Δ) المستقيم المار من I

والعمودي على المستقيم (AB) ولتكن نقطة بحيث $E \in (\Delta)$

(1) أرسم شكلا تقريبا (2) بين أن $AB = 8$ وأحسب BC

(3) أحسب: $\overline{BI} \cdot \overline{BA}$ (4) بين أن $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = 48$

(5) أحسب: AJ

الأجوبة: (1)

$$(2) \text{ لدينا } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 \text{ يعني } AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$$

$$\text{يعني } AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16 \text{ يعني } AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$AB^2 = 64 \text{ يعني } AB = 8$$

ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$\text{بالتعويض نجد: } BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4} \text{ يعني } BC^2 = 96$$

$$BC = \sqrt{96} \text{ يعني}$$

(3)

$$\overline{BI} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA}^2 = \frac{3}{4} BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$$

$$\overline{EB} \cdot \overline{AB} = (\overline{EI} + \overline{IB}) \cdot \overline{AB} = \overline{EI} \cdot \overline{AB} + \overline{IB} \cdot \overline{AB} \text{ (4)}$$

$$\text{لدينا } \overline{EI} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ لأن } \overline{EI} \perp \overline{AB} \text{ ومنه :}$$

$$\overline{EB} \cdot \overline{AB} = \overline{IB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BI}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BI} \cdot \overline{BA} = 48$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} \sqrt{96}^2 \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

$$\text{يعني : } 128 = 2AJ^2 + 48 \text{ يعني } 80 = 2AJ^2$$

$$AJ^2 = 40 \text{ يعني } AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

