TD/Arithmétique - Divisibilité

Exercice1 : Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

Exercice2 : a, b, c sont trois entiers relatifs non nuls. Démontrer les propriétés suivantes :
1) Si a divise b et b divise c alors a divise c.
2) Si a divise b et b divise a alors a et b sont égaux ou opposés.
3) Si c divise a et b alors pour tous entiers relatifs u et v, c divise au + bv.
1) Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.
2) Démontrer que lorsque n est un entier impair, 8 divise n^2-1

Exercice3 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice4 : Montrer que si l'on soustrait à un entier naturel strictement inferieur a 100, la somme de ses chiffres, alors le résultat est toujours divisible par 9.

Exercice5 : $n\in\mathbb{N}$
1. Montrer que si un entier naturel d divise 12n + 7 et 3n + 1 alors il divise 3.
2. En déduire que la fraction $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Exercice6 :Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif n telles que $\frac{10n-4}{3n+1}$ Soit un entier relatif.

Exercice7 : $n\in\mathbb{N}$
1. Démontrer que n + 1 divise n^2+5n+4 et n^2+3n+2.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par n + 1.
3. En déduire que, $\forall n\in\mathbb{N}$ $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2.

Exercice8 : Que peut-on dire des affirmations suivantes. Justifier par un raisonnement.
1) Si c divise a mais pas b, alors c ne divise Par a + b
2) Si c ne divise ni a, ni b alors c ne divise Pas a + b.
3) 3 ne divise pas 3n + 1 où n est un entier naturel.

Exercice9 :résoudre dans $\mathbb{N}$ .l'équation $4x^2-y^2=20$

Exercice10 : Pour quelles valeurs de l'entier naturel n'a-t-on n + 8 divisible par n ?

Exercice11 :Démontrer $\forall n\in\mathbb{N}$ $3^{2n}-1$ est un multiple de 8.

Exercice12 :Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 7^n-1 est divisible par 6.

Exercice13 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n+15n-1$ est divisible par 9.

Exercice14 : Soit P(n) la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par : P(n) : 4^n+1 Est divisible par 3
1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie. Que peut-on conclure ?

Exercice15 : Erreur classique dans les récurrences
Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
(P_n) : 10^n-1 est divisible par 9
(Q_n) : 10^n+1 est divisible par 9
1) Démontrer que si (P_n) est vraie alors (P_{n+1}) est vraie.
2) Démontrer que si (Q_n) est vraie alors (Q_{n+1}) est vraie.
3) Un _élève affirme : " Donc (P_n) et (Q_n) sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4) Démontrer que (P_n) est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$
5) Démontrer que (Q_n) est fausse $\forall n\in\mathbb{N}$.
(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)

Exercice16 : Divisibilité : une équation de Pell-Fermat
On considère l'équation (E) : $a^2-2b^2=1$ et (a ; b) un couple d'entiers solution de cette équation.
1. a) Montrer que a est impair.
b) Montrer que b est pair.
2. Montrer que a et b sont premiers entre eux.
3. Montrer que le couple $(3a+4b;2a+3b)$ est aussi un couple solution de l'équation (E).
4. A l'aide d'une solution évidente, trouver un couple solution avec des entiers supérieurs à 100.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Exercice17 : soit n un entier, montrer que les entiers 3n+2 et 9n+5 n'ont pas de diviseurs communs hormis 1 (et −1).

Exercice18 : Les affirmations suivantes sont-elles ou vraies ou fausse ? Justifier

1) 42 a plus de diviseurs que 40.
2) Le produit d'un nombre pair par un nombre impair est pair.
3) Un entier naturel différent de 0 et de 1 a toujours un nombre pair de diviseurs positifs.
4) Soit a, b et c trois entiers tels que a/c et b/c alors ab/c.
5) $3/n(n^2-1)$ où n est un entier relatif.

Exercice19 : On décide de former des nombres dans le système décimal en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant puis en permutant les deux premiers chiffres de gauche.
Par exemple, à partir de 4567 on obtient 5467, à partir de 2345 on obtient 3245.
Démontrer que tous les entiers naturels ainsi obtenus sont multiples de 11.

Exercice20 : Deux nombres entiers n et m sont dits amicaux si la somme des diviseurs de n (nnon compris) vaut m et la somme des diviseurs de m (m non compris) vaut n. Montrer que 220 et 284 sont amicaux.

Exercice21 : On considère un entier de 3 chiffres. On appelle renversé de cet entier le nombre qui s'écrit en échangeant les chiffres des centaines et des unités.
Par exemple, le renversé de 158 est 851.
Montrer que la différence entre un entier de 3 chiffres et son renversé est divisible par 99.

Exercice22 : 1)Vérifier que 2016 2016 est divisible par 73 et 137.
2) Essayer avec d'autres entiers obtenus en juxtaposant deux entiers à 4 chiffres et démontrer qu'il en sera toujours ainsi.

Exercice23 : On considère l'écriture en base 10 d'un entier
1) Montrer que si $2d+u$ est un multiple de 4 alors n est un multiple de.
2) Montrer que la réciproque est également vraie.

Exercice24 : Trouver tous les couples d'entiers naturels (x ; y) qui vérifient :

a) $x(y+1)=14$ b) $(x+2y)(2x-3y)=15$

c) $x^2-y^2=20$ d) $2x^2=4y+1$

Exercice25 : Montrer que l'équation $4x^2=y^2+33$ n'admet aucun couple d 'entiers (x ; y) comme solution.

Exercice26 : On souhaite résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation (E): $n^3+4n=240$.
1) Montrer qu'une solution n de (E) ne peut pas être un entier impair.
2) Résoudre l'équation (E)

Exercice27 : On considère l'équation (E) : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ où x et y sont des entiers relatifs non nuls.
1) Montrer que (E) est équivalente à $(x-5)(y-5)=25$ avec x et y non nuls.
2) En déduire les solutions de (E).

Exercice28 : Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)
Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$
1) Montrer que si (x,y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier 15x−12y est divisible par 3.
2) Existe-il au moins un point de la droite Δ dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Exercice29 : Soit $n\in\mathbb{Z}$. Pour quelles valeurs de n , $\frac{2n-29}{n+2}$ est-il un entier relatif?

Exercice30 : Soit n un entier naturel.
1) Vérifier que $2n^2-n-6=(n+3)(2n-7)+15$ 2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles la fraction $\frac{2n^2-n-6}{n+3}$ est un entier relatif.

Exercice31 : Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la fraction $\frac{9n-8}{3n+1}$ n'est jamais un entier.

Exercice32 : Soit n est un entier naturel.
1) Démontrer que quel que soit n on a $n+2$ divise n^2+3n+2
2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $n+2$ divise $4n^2+12n+20$

Exercice33 : Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $2n-3$ divise $3n+5$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien