TD/Arithmétique - PGCD

Exercice1 : déterminer le PGCD `a l'aide de la décomposition en facteurs premiers

Déterminer le PGCD de 4480 et 400 `a l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice2 : déterminer le PGCD a l'aide de l'algorithme d'Euclide

Déterminer le PGCD de 3045 et 300 a l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice3 : PGCD : calcul avec un paramètre

Pour tout entier naturel non nul, on pose : a = 5n + 1 et b = 2n − 1. On note Δ = PGCD (a ; b).

1. D´démontrer que les valeurs possibles de Δ sont 1 ou 7.
2. Déterminer les entiers n tels que : a ≡ 0 [7] et b ≡ 0 [7].
3. En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de Δ.

Exercice4 : PGCD (a; b) = PGCD(b; r) et Application

Soient a et b deux entiers tels que 0 < b 6 a.

Démontrer que : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste dans la division euclidienne de a par b.

Exercice5 : PGCD : l'algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels, on note D (a ; b) l'ensemble des diviseurs communs de a et b. Dans la suite, on considère que a > b > 0.

1. a) Montrer que D (a ; b) = D (a − b ; b).
b) En déduire que PGCD (a ; b) = PGCD (a − b ; b).
2. Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b, montrer, en vous aidant de la question précédente, que PGCD (a ; b) = PGCD (r ; b).
3. En vous aidant des divisions euclidiennes ci-dessous, déterminer : PGCD (416 ; 182).

416 = 2 × 182 + 52 et 182 = 3 × 52 + 26 et 52 = 2 × 26 + 0

Exercice6 : PGCD : utiliser la caractérisation d'un PGCD

Trouver les entiers naturels a et b avec a < b tels que : ab = 7 776 et PGCD(a ; b) = 18

Exercice7 : PGCD : diviseurs communs

Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier naturel non nul n, les restes respectifs sont 10 et 11.

Quel est cet entier ?

Exercice8: PGCD : PGCD égal a la différence

Soient a et b deux entiers naturels avec a > b > 0, montrer que PGCD(a ; b) = a − b si et seulement si, il existe un entier k tel que a = (k + 1)(a − b) et b = k(a − b).

Exercice99 : PGCD : la boite de cubes

Une boite parallélépipédique rectangle de dimensions intérieures 31,2 cm, 13 cm et 7,8 cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres. Quel est le nombre minimal de cubes que peut contenir cette boite ?

Exercice10 : Nombres premiers : PGCD et PPCM

On pose a = 588 et b = 616.

1. décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. En déduire PGCD (a ; b).
3. déduire également de la première question PPCM (a ; b) (c'est à dire le plus petit multiple commun de a et b)

Exercice11: PGCD et suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$u_{n+1} = 4u_n + 1$ et $u_0 = 0$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.
2. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
3. Calculer $PGCD\left(4^{n+1} - 1 : 4^n - 1\right)$

Exercice12 : Nombres de Fermat et infinitude des nombres premiers

On rappelle que les nombres de Fermat sont les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ Avec n un entier naturel.

1. Etablir que pour tous entiers naturels n et k, on a : $F_{n+k} - 1 = \left(F_n - 1\right)^{2^k}$.
2. En déduire que si k est un entier naturel non nul alors pour tout entier naturel n, on a : $F_{n+k} \equiv 2\left[F_n\right]$
3. En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
4. Retrouver alors qu'il existe une infinité de nombres premiers.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien